

Telif hakları sahibi: Mehmet Sait Eroğlu (Nisan 2025)

Bu eser Creative Commons Alıntı-GayriTicari-Türetilemez 4.0 Uluslararası (CC BY-NC-ND 4.0) lisansı ile okuyuculara sunulmaktadır. Lisansla ilgili bilgi için <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.tr> adresine bakılabilir.

$\mathbb{R}^n$ 'DE İNTEGRAL

Mehmet Sait Eroğlu

iletisim@eroglukitap.com

Erken yitirdiklerime,
yarı anne Güner ablama ve
küçüğüm, ismiyle özdeş Melek'ime.

İçindekiler

Önsöz	vii
1 Önbilgiler	1
1.1 Ağlar	2
2 $\mathbb{R}^n$'de Hacim ve Riemann İntegrali	9
2.1 $\mathbb{R}^n$ 'de Özel Yarıhalkalar, Halkalar ve Hacimler	13
2.2 Jordan Hacmi	19
2.3 Riemann İntegrali	32
2.4 Lebesgue Ölçütü	54
2.5 Parametreye Bağlı İntegraller ve Fubini teoremi	60
2.6 Değişken Değişimi	68
2.7 $\mathbb{R}$ 'ye Özgü Teoremler	78
2.8 Mutlak İntegrallenebilirlik ve Özdeş İntegraller ¹	92
2.8.1 Mutlak İntegrallenebilir Fonksiyonlar	92
2.8.2 Özdeş İntegraller	94
2.9 Vektör Değerli Fonksiyonlarda İntegral	99
3 Lebesgue Ölçüsü ve Lebesgue İntegrali	107
3.1 σ -cebirleri	108
3.2 Lebesgue Ölçüsü	111
3.3 Lebesgue İntegrali	129
3.3.1 Ölçüsel Yaklaşım	133
3.3.2 Ölçülebilir Fonksiyonlar	139
3.3.3 Riemann Tipi Yaklaşım	146
3.3.4 Darboux ve Riemann Tipi Yaklaşımlar	155
3.3.5 Pozitif Değerli Fonksiyonlar	162

¹İngilizce “improper integrals”, almanca “uneigentliche Integrale”, fransızca “intégrales impropres”. Bizde genelde “has olmayan integraller” olarak geçer. Seçtiğimiz adlandırmanın daha iyi olduğunu düşünüyoruz.

3.3.6	Yakınsaklık Teoremleri	165
3.4	Cavalieri, Fubini ve Dönüşüm Teoremleri	170
3.5	Vitali Örtüleri ve Yoğunluk	178
3.6	Tek Değişkenli Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar, Ana- teorem ve Kısmi İntegrasyon	182
4	İntegrale Farklı Yaklaşımlar	199
4.1	(Riemann-)Stieltjes İntegrali	199
4.2	Ölçüsel Yaklaşım	202
4.3	Fonksiyonel Yaklaşım	204
4.4	Kurzweil-Henstock İntegrali	206
	Sembol Listesi	215
	Kaynakça	217

Önsöz

Bu kitabı yazarken şu soruları hep göz önünde tuttum: Buraya nereden geldik? Bu kavram nereden çıktı? Eğer genelleştirmeler söz konusu ise matematiksel olarak kendini dayatanlar hangileridir?

Kitap dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, ağırlar hakkında kısa ön bilgileri içerir. Kitabın ana gövdesini “ $\mathbb{R}^n$ ’de Hacim ve Riemann İntegrali” başlıklı ikinci bölümle, “Lebesgue Ölçüsü ve Lebesgue İntegrali” başlıklı üçüncü bölüm oluşturur. Son bölümde ise okur, integrale farklı yaklaşımlar hakkında bilgilendirilmiştir.

Riemann integralinde genelde izlenen yol şudur: İlk yarıyılıda bir $[a, b]$ aralığında sınırlı bir $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, ikinci veya üçüncü yarıyılıda ise bir kapalı $Q \subset \mathbb{R}^n$ kutusunda tanımlı sınırlı bir $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Riemann integrallenebilirlik tanımıyla yola çıkılır. Biz doğrudan Jordan ölçülebilir bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesinde tanımlı sınırlı $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarıyla çalışacağız. Dolayısıyla önce $\mathbb{R}^n$ ’de Jordan ölçülebilir kümeler ve hacimlerini ele aldık. $\langle a, b \rangle$ herhangi tipten bir aralık olmak üzere $Q = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$ kutusunun hacmi $v_n(Q) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ olarak açıklanır. Sonlu sayıda kutuların birleşimlerine figür diyelim ve bunların $\mathbb{R}^n$ ’deki ailesini $\mathcal{F}^n$ ile gösterelim. Her F figürü sonlu sayıda ayrık $Q_1, \dots, Q_k$ kutusunun birleşimi olarak yazılabilir; $\sum_{i=1}^k v_n(Q_i)$ sayısı bu parçalanıştan bağımsızdır ve $v_n(F) := \sum_{i=1}^k v_n(Q_i)$ olarak açıklanır. $\mathcal{F}^n$ bir halkadır ve $v_n : \mathcal{F}^n \rightarrow [0, +\infty)$ sonlu toplamsaldır. Herhangi bir sınırlı A kümesi için A ’yı içeren F figürlerinin hacimlerinin infimumu $\underline{j}_n(A)$ ve A ’ya düşen figürlerin hacimlerinin supremumu $\overline{j}_n(A)$ olmak üzere $\overline{j}_n(A) = \underline{j}_n(A)$ ise A Jordan ölçülebilir denir ve bu ortak değere A ’nın Jordan hacmi denir ve $j_n(A)$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ ’de Jordan ölçülebilir kümelerin ailesini $\mathcal{J}^n$ ile gösterirsek bu bir halkadır ve $j_n : \mathcal{J}^n \rightarrow [0, +\infty)$ sonlu toplamsaldır. Tanım gereği her Jordan ölçülebilir küme *sınırlıdır*.

Şimdi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir olsun. $A_1, \dots, A_k \subset \Omega$ kümeleri ayrık, Jordan ölçülebilir ve $\Omega = \bigcup A_i$ ise $\mathcal{Z} := \{A_1, \dots, A_k\}$ ’ye Ω ’nın bir parçalanışı diyelim ve bu parçalanışların kümesini $\mathfrak{Z}(\Omega)$ ile gösterelim. $\mathcal{Z}' := \{B_1, \dots, B_l\}$ bir başka parçalanış olmak üzere daima $A_i = \bigcup_{B_j \subset A_i} B_j$ ise

$\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$ olsun. $(\mathfrak{Z}(\Omega), \prec)$ yukarı doğru yönlenmiş bir kümedir. $a_i \in A_i$ olmak üzere $R(f, \mathcal{Z}(a)) := \sum_{i=1}^k f(a_i) j_n(A_i)$ olmak üzere $(R(f, \mathcal{Z}(a)))_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)}$ ağının bir limiti varsa f Riemann integrallenebilir ve limitine f 'nin Riemann integrali denir ve $\int_{\Omega} f dj_n$ olarak gösterilir. Bu Riemann'ın tanımından farklı ancak ona denktir. $A \subset \mathbb{R}^n$ için $d(A)$ ile A 'nın çapını gösterebiliriz ve $\mathcal{Z} := \{A_1, \dots, A_k\}$ parçalanışı için $\|\mathcal{Z}\| := \max_{1 \leq i \leq k} d(A_i)$ olarak açıklayalım. Eğer $\lim_{\|\mathcal{Z}\| \rightarrow 0} R(f, \mathcal{Z}(a))$ limiti varsa, Riemann, f fonksiyonu Ω 'da integrallenebilir der bu limiti $\int_{\Omega} f dj_n$ olarak açıklar. Bu iki yaklaşımın denk olduğunu kanıtladık. $A \subset \Omega$ için $sl(f, A) = \sup \{|f(x) - f(y)|, x, y \in A\}$ olmak üzere $\mathcal{Z} = \{A_i\}$ olmak üzere $Sl(f, \mathcal{Z}) = \sum_i sl(f, A_i) j_n(A_i)$ olsun. f 'nin Riemann integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için bir $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ parçalanışının $Sl(f, \mathcal{Z}) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmesidir. Buna ε -ölçütü denir.

Riemann integralini genelleştirmek istersek bazı seçenekler var. Bu yaklaşımda ilk ilk iş ölçü açıkladığımız altkümeleri genişletmek olacak. $\mathcal{J}^n$ yerine, onu içeren bir $\mathcal{L}^n \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ peşindeyiz. Jordan ölçülemeyen açık kümelerin varlığı iyi bir şey değil. Açık ve kapalı kümeler analizde çok önemlidirler; $\mathcal{L}^n$ bunları içermeli. *Sonlu* kutulardan oluşan F figürlerinin oluşturduğu $\mathcal{F}^n$ halkası yerine *sayılabilir* kutulardan oluşan $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ ailesinden yola çıkabiliriz. $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ açık kümeleri içerir ancak bir halka bile değildir. Her $A \in \mathcal{L}^n$ için $A^c = (\mathbb{R}^n \setminus A) \in \mathcal{L}^n$ olmasını istersek $\mathcal{L}^n$, $\mathbb{R}^n$ 'deki tüm açık ve kapalı kümeleri içerir. Biz $\mathcal{L}^n$ 'nin bir σ -cebiri olmasını ve her $A \in \mathcal{L}^n$ için bir $\lambda_n(A) \in [0, +\infty]$ ölçüsünü $\lambda_n : \mathcal{L}^n \rightarrow [0, +\infty]$ σ -toplamsal olacak şekilde açıklamak istiyoruz. Lebesgue ölçülebilirlik tanımında Carathéodory'nin tanımını kullanmayacağız, çok kullanışlı olmasına karşın bir açıklamasını bilmiyorum ve bilene de rastlamadım; olanlar da zorlama! Jordan ölçülebilirlik tanımının bir eşdeğerini burada tanım olarak kullandık. $\mathcal{J}^n \subset \mathcal{L}^n$ ve $\lambda_n|_{\mathcal{L}^n} = j_n$.

$A \in \mathcal{L}^n$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. A 'nın da f 'nin de sınırlı olması gerekmez. Lebesgue integraline üç farklı biçimde yaklaşacağız. Bu koşullar aşağıda irdedeceğimiz üç yaklaşımda korunacaktır.

Ölçüsel yaklaşım: Eğer $f \geq 0$ ve $[0, f] := \{(x, y) \mid x \in A, 0 \leq y \leq f(x)\} \in \mathcal{L}^{n+1}$ ise f , λ -ölçülebilir diyelim; $\int_A f d\lambda_n := \lambda_{n+1}([0, f])$ 'ye f 'nin Lebesgue integrali denir. Ancak $\int_A f d\lambda_n$ sonlu ise f Lebesgue integrallenebilir denir. Şimdi $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. f^+ ve f^- 'nin her ikisi de λ -ölçülebilirse f fonksiyonu λ -ölçülebilir denir. $\int_A f^+ d\lambda_n$ ve $\int_A f^- d\lambda_n$ 'nin her ikisi de $+\infty$ değilse $\int_A f d\lambda_n := \int_A f^+ d\lambda_n - \int_A f^- d\lambda_n$ olarak açıklanır. Ayrıca $\int_A f d\lambda_n$ sonlu ise f fonksiyonu Lebesgue integrallenebilir denir. Tanımdan görüldüğü gibi f 'nin Lebesgue integrallenebilir olması $|f|$ 'nin Lebesgue integrallenebilir olmasına denktir. Bu, onca artılarının yanında, Lebesgue integralinin zayıf noktasıdır.

Riemann tipi yaklaşım: $A \in \mathcal{L}^n$ ve V bir Banach uzayı olmak üzere $f : A \rightarrow V$ olsun. A 'nın Lebesgue kümelerine sayılabilir $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I}$ parçalanışlarının kümesini $\mathfrak{Z}_A$ ile gösterelim. $a_i \in A_i$ olmak üzere $R(f, \mathcal{Z}(a)) := \sum_i f(a_i) \lambda_n(A_i)$ olsun. Genelde bu serinin toplanabilir olması gerekmez. $\mathfrak{Z}_f^<$ ile $Sl(f, \mathcal{Z}) = \sum_i sl(f, A_i) \lambda_n(A_i) < +\infty$ olan $\mathcal{Z}$ parçalanışlarının kümesini $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A$ ile gösterelim. Bu durumda $(R(f, \mathcal{Z}(a)))_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_f^<}$ ağının limiti varsa f fonksiyonu A 'da Lebesgue integrallenebilir denir ve bu limit $\int_A f d\lambda_n$ ile gösterilir.

Darboux ve Riemann tipi yaklaşım: Bu durumda $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Bu bir önceki yaklaşımın $V = \mathbb{R}$ özel durumuna kısmen benzer. Toplamların limitine geçmeden önce ayrıntılı biçimde ölçülebilir fonksiyonlar ele alınır ve genelde bu fonksiyonlarla niye ilgilendiğimiz açıklanmaz. Biz λ -ölçülebilir, ölçülebilir ve ε -ölçülebilir olmak olmak üzere üç farklı kavram açıklayıp denkliklerini kanıtladık.

Yine iki kişiye teşekkür borçluyum. Oğlum Ilgar'a ve eşim Yıldız'a. Özellikle eşim Yıldız'a hakkettiği teşekkürü ifade edecek sözcükleri bulamıyorum.

Mehmet Sait Eroğlu

Bölüm 1

Ön bilgiler

Kitabımızda $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ sırasıyla doğal sayılar, tam sayılar, gerçel sayılar ve kompleks sayılar kümelerini göstereceklerdir. Bu kümelerden 0 ögesini çıkardığımızda kalan kümeler ise sırasıyla $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$ ve $\mathbb{C}^*$ ile gösterileceklerdir. Ayrıca $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ ve $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ olacaktır. Kullanacağımız bazı kısaltmalar şunlardır: dd (diğer deyişle), bb (benzer biçimde), gvyk (gerek ve yeter koşul), ava (ancak ve ancak), gbk (genellikten bir şey kaybetmeden), hh (hemen her, hhy (hemen her yerde). $a := b$ ve $b =: a$ gösterimlerinin her ikisi de “tanım gereği a , b 'ye eşittir” veya “ a , b olsun” demektir. p ve q önermeler olmak üzere “ $p : \Longleftrightarrow q$ ” ve “ $q \Longleftarrow : p$ ” gösterimlerinin her ikisi de “ p önermesi tanım gereği q 'ya denktir” demektir. $\stackrel{*}{=}, \stackrel{*}{\Rightarrow}, \stackrel{*}{\Longleftrightarrow}$ gösterimlerinde $*$ sırasıyla eşitliğin, çıkarımın ve denkliğin gerekçesini belirtir. $\varphi(x)$, X kümesinin öğelerine ilişkin bir önerme ise $\exists! x \in X$ ($\varphi(x)$) önermesi $\varphi(x)$ önermesinin bir tek x için doğru olduğunu öne sürer. Bu kullanımlarda p yeni bir terim içerir ve bu terim q ile tanımlanmıştır. X herhangi bir küme olmak üzere X 'in güç kümesini $\mathfrak{P}(X)$ ile göstereceğiz. $A, B \subset X$ ayrıksalar, bunu vurgulamak için $A \cup B$ yerine $A \sqcup B$ ve $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{P}(X)$ ailesi ayrıkrsa, $\bigcup_{i \in I} A_i$ yerine $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ yazacağız. Ayrıklıkları belirtilmeden $A \sqcup B$ ve $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ gösterimleri kullanılmışsa, bu gösterim bu birleşimlerin ayrık olduğunu da vurgulayacaktır.

$\bar{\mathbb{R}}$ ile $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ kümesi gösterilecektir. $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ olmak üzere $\langle a, b \rangle$ ile (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ ve $[a, b]$ aralıklarından herhangi biri gösterilecektir. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere $\overset{\circ}{A}$, $\bar{A}$ ve ∂A ile sırasıyla A kümesinin içi, kapanışı ve sınırı gösterilecektir. $A, B \subset X$ kümelerine, $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$ ise **girişimsiz** diyeceğiz.

Bu kitapta okurun kümeler kuramı, cebir, doğrusal cebir, analiz ve topolojinin temel bilgilerini bildiğini varsayacağız. Bu alanlardan kullanacağımız bilgiler, hazırlamayı düşündüğümüz analiz kitabında ele alınacaklardır. Bu-

rada, analizde ve topolojide genelde yer bulmayan, ancak bizim için önemli olan ağlara kısaca değineceğiz. Ağlar bu alanlarda karşılaştığımız tüm limitleri kapsar ve ağlara ilişkin teoremler dizilere ilişkin teoremlerden daha zor elde edilmezler.

1.1 Ağlar

Tanım 1.1.1 $\Lambda \neq \emptyset$ kümesinde $\prec$ bağıntısı verilsin. Aşağıdaki koşullar sağlandığında $(\Lambda, \prec)$ ikilisine bir **(yukarı doğru) yönlenmiş küme** denir¹:

- (i) Her $\alpha \in \Lambda$ için $\alpha \prec \alpha$, dd $\prec$ yansımalıdır,
- (ii) Her $\alpha, \beta \in \Lambda$ için $\alpha \prec \beta$ ve $\beta \prec \gamma$ ise $\alpha \prec \gamma$, dd $\prec$ geçişlidir,
- (iii) Her $\alpha, \beta \in \Lambda$ için bir $\gamma \in \Lambda$ ögesi $\alpha \prec \gamma$ ve $\beta \prec \gamma$ olacak biçimde vardır, dd Λ kümesi $\prec$ ile (yukarıya doğru) yönlenmiştir.

Bazen $\alpha \prec \beta$ yerine $\beta \succ \alpha$ da yazacağız; bu durumda β , α 'dan **daha ötededir** diyelim. $(\mathbb{R}, \leq)$ ve $(\mathbb{N}, \leq)$ doğal sıralamalarıyla birer yönlenmiş kümelerdir. X bir topolojik uzay, $a \in X$ ve $\mathcal{U}(a)$ ise a 'nın komşuluklarının kümesi olmak üzere $U, V \in \mathcal{U}(a)$ için $U \prec V :\iff V \subset U$ olarak açıklanırsa $(\mathcal{U}(a), \prec)$ bir yönlenmiş kümedir. Herhangi bir yönlenmiş Λ kümesinde verilen α, β öğeleri için $\alpha \prec \beta$ veya $\beta \prec \alpha$ olması gerekmez. Örneğin $X = \mathbb{R}$ doğal topolojisiyle alındığında $I = (-2, 1)$ ve $J = (-1, 2)$ aralıklarının her ikisi de $\mathcal{U}(0)$ yönlenmiş kümesindedirler; ancak ne $I \prec J$ ne de $J \prec I$!

$(\Lambda, \prec)$ bir yönlenmiş küme ve $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olsun. Bir $f : \Lambda \rightarrow X$ fonksiyonuna X 'te **bir ağ** denir. f ağı, $f_\alpha := f(\alpha)$ veya $x_\alpha := f(\alpha)$ olmak üzere $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ veya $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ olarak gösterilir. Eğer Λ belli ise kısaca (f_α) veya (x_α) da yazacağız. X 'te bir ağ yerine X 'te **bir Λ -dizisi** de denir.

Tanım 1.1.2 X topolojik uzayında bir $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ağı ve bir $a \in X$ noktası verilsin.

$$\lim_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha = a :\iff \forall U \in \mathcal{U}(a) \exists \alpha_U \forall \alpha \in \Lambda (\alpha \succ \alpha_U \implies x_\alpha \in U). \quad (1.1)$$

sağlanmışsa $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ **ağ**ı a **noktasına yakınsaktır** denir.

Lemma 1.1.3 Hausdorff uzaylarında ağlar ancak tek bir noktaya yakınsak olabilirler.

¹“Yukarı doğru yönlenmiş küme”nin ikilisi “aşağı doğru yönlenmiş küme”dir. Tanım-daki (iii) yerine “(iii)’ Her $\alpha, \beta \in \Lambda$ için bir $\gamma \in \Lambda$ ögesi $\gamma \prec \alpha$ ve $\gamma \prec \beta$ olacak biçimde vardır.” alırsak aşağı doğru yönlenmiş bir küme elde ederiz. Biz yalnızca yukarı doğru yönlenmiş kümelerle çalışacağımız için, onlardan kısaca “yönlenmiş küme” olarak söz edeceğiz.

Kanıt. X Hausdorff uzayındaki $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ağının farklı a, b noktalarına yakınsak olduğunu varsayalım. X Hausdorff uzayı olduğundan a ve b noktalarının U ve V komşulukları $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde seçilebilirler. α_U ve α_V ögeleri (1.1)'deki gibi seçilsinler. Tanım 1.1.1 (iii)'ten bir $\beta \in \Lambda$ ögesi $\alpha_U \prec \beta$ ve $\alpha_V \prec \beta$ olacak biçimde vardır. Bu durumda $x_\beta \in U \cap V = \emptyset$ çelişkisine ulaşırız. ■

X Hausdorff uzayında verilen bir $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ağı bir a noktasına yakınsaksa, tek olarak belirli olan a noktasına $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ **ağının limiti** denir ve bu

$$\lim_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha = a \text{ veya } \lim_{\alpha} x_\alpha = a \text{ veya yalın olarak } \lim x_\alpha = a$$

ile gösterilir.

Eğer (X, d) bir metrik uzaysa

$$\lim_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha_\varepsilon \in \Lambda \forall \alpha \in \Lambda (\alpha \succ \alpha_\varepsilon \implies d(x_\alpha, a) < \varepsilon), \quad (1.2)$$

eğer $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzaysa

$$\lim_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha_\varepsilon \in \Lambda \forall \alpha \in \Lambda (\alpha \succ \alpha_\varepsilon \implies \|x_\alpha - a\| < \varepsilon), \quad (1.3)$$

anlamına gelir. $(\Lambda, \prec) = (\mathbb{N}, \leq)$ olması durumunda bu tanımlar tam da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin yakınsaklık tanımlarıdır.

Diziler için bildiğimiz çoğu önerme olduğu gibi ağ limitlerine aktarılır.

Lemma 1.1.4 (i) $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ağı X normlu uzayında yakınsaksa bir $p > 0$ sayısı ve bir α_p her $\alpha_p \prec \alpha \in \Lambda$ için $\|x_\alpha\| \leq p$ olacak biçimde vardır.
(ii) X, Y normlu uzaylar, $(x_\alpha) \subset X$ yakınsak bir ağ ve $a = \lim_{\alpha} x_\alpha$ olsun. a 'nın bir U komşuluğunda tanımlı $g : U \rightarrow Y$ fonksiyonu a noktasında sürekli ise $(y_\alpha) = (g(x_\alpha))$ ağı $g(a)$ 'ya yakınsaktır, dd $\exists \lim_{\alpha} g(x_\alpha) = g(a) = g(\lim_{\alpha} x_\alpha)$.

Kanıt. (i) $a = \lim_{\alpha} x_\alpha$ ise bir $\alpha_p \in \Lambda$ ögesi $\alpha_p \prec \alpha \in \Lambda \implies \|x_\alpha - a\| < 1$ olacak biçimde vardır. $p := \|a\| + 1$ işimizi görür.

(ii) $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. g fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan bir $\delta > 0$ sayısı $\|x - a\| < \delta$ ise $x \in U$ ve $\|g(x) - g(a)\| < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilir. $\lim_{\alpha} x_\alpha = a$ olduğundan bir α' ile her $\alpha' \prec \alpha \in \Lambda$ için $\|x - a\| < \delta$. Bu durumda her $\alpha' \prec \alpha \in \Lambda$ için $\|g(x_\alpha) - g(a)\| < \varepsilon$. Dolayısıyla $\lim_{\alpha} g(x_\alpha) = g(a)$. ■

Bu kanıtlar bildik kanıtların benzeridirler. X metrik uzayında $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ağı verilsin.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha_\varepsilon \in \Lambda \forall \alpha, \beta \in \Lambda (\alpha, \beta \succ \alpha_\varepsilon \implies d(\alpha, \beta) < \varepsilon) \quad (1.4)$$

sağlanıyorsa, $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ bir **Cauchy ağıdır** denir.

Teorem 1.1.5 (Cauchy Ölçütü) (X, d) tam metrik uzayında $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ağı verilsin. $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ağının yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bir Cauchy ağı olmasıdır.

Kanıt. Yakınsak ağların Cauchy ağı olduğu kolayca görülür. Şimdi bir $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ Cauchy ağı verilsin. Her $k \in \mathbb{N}^*$ için bir $\alpha_k \in \Lambda$ ögesi

$$\alpha, \beta \succ \alpha_k \implies d(x_\alpha, x_\beta) < \frac{1}{k} \quad (1.5)$$

olacak biçimde vardır. Tanım 1.1.1 (iii)'ten dolayı $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \alpha_3 \prec \dots$ seçebiliriz. Özellikle sabit tutulan p için

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* \left(m, n \geq p \implies d(x_{\alpha_m}, x_{\alpha_n}) < \frac{1}{p} \right). \quad (1.6)$$

$(x_{\alpha_m}) \subset X$ dizisi (1.6)'dan dolayı X 'te bir Cauchy dizisidir. X bir tam metrik uzay olduğundan bu dizi bir $a \in X$ noktasına yakınsar; $a = \lim_{m \rightarrow +\infty} x_{\alpha_m}$. (1.5)'te $\beta = \alpha_m$ alıp $m \rightarrow +\infty$ limitine geçerse her $\alpha \succ \alpha_k$ için $d(x_\alpha, a) \leq 1/k$ elde ederiz. k keyfi olduğundan $\lim_\alpha x_\alpha = a$ olur. ■

Kanıtta geçen bir bilgiyi ayrıca not edelim.

Sonuç 1.1.6 $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ bir Cauchy ağı ise bir $(\alpha_k)_{k \geq 1} \subset \Lambda$ dizisi $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \alpha_3 \prec \dots$ ve $\lim_k x_{\alpha_k} = \lim_\alpha x_\alpha$ olacak biçimde vardır.

Gördüğümüz gibi $\mathbb{R}$ 'de dizilere ilişkin bildiğimiz tanımlar ve önermeler ise kanıtlarıyla birlikte $\mathbb{R}$ 'deki ağlara aktarılırlar. Bunlardan bazıılarını listelemekle yetineceğiz. $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}$ 'deki ağları ayrıca incelemeye gerek yoktur. Kolayca görüleceği gibi $\mathbb{R}^n$ 'deki bir $(x_\alpha) = ((x_{1\alpha}, \dots, x_{n\alpha}))$ ağının yakınsak olması her bir $(x_{k\alpha}), 1 \leq k \leq n$ ağının $\mathbb{R}$ 'de yakınsak olmasına denktir; yakınsaklık durumunda $\lim_\alpha x_\alpha = (\lim_\alpha x_{1\alpha}, \dots, \lim_\alpha x_{n\alpha})$. Benzer biçimde $\mathbb{C}$ 'de bir $(z_\alpha) = (x_\alpha + iy_\alpha)$ ağının yakınsak olması (x_α) ve (y_α) ağlarının yakınsak olmasına denktir; yakınsaklık durumunda ise $\lim_\alpha z_\alpha = \lim_\alpha x_\alpha + i \lim_\alpha y_\alpha$.

Önerme 1.1.7 (Limit Kuralları) $\mathbb{R}$ 'de $(x_\alpha), (y_\alpha)$ ağları yakınsak ve $a = \lim_\alpha x_\alpha, b = \lim_\alpha y_\alpha$ olsun.

(i) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(\lambda x_\alpha + \mu y_\alpha), (x_\alpha y_\alpha)$ ve $b \neq 0$ ise (x_α/y_α) ağları da yakınsaktır ve²

$$\lim_\alpha (\lambda x_\alpha + \mu y_\alpha) = \lambda a + \mu b, \quad \lim_\alpha x_\alpha y_\alpha = ab \quad \text{ve} \quad \lim_\alpha \frac{x_\alpha}{y_\alpha} = \frac{a}{b}.$$

(ii) **Monotonluk:** $\alpha_0 \in \Lambda$ ve her $\alpha \succ \alpha_0$ için $x_\alpha \leq y_\alpha$ ise $a \leq b$.

² $b \neq 0$ olduğundan bir α' her $\alpha \succ \alpha'$ için $y_\alpha \neq 0$ olacak biçimde vardır!

(iii) **Sandviç Teoremi:** Her $\alpha \in \Lambda$ için $x_\alpha \leq z_\alpha \leq y_\alpha$ ve $\lim x_\alpha = \lim y_\alpha = a$ ise (z_α) ağı da yakınsaktır ve $\lim z_\alpha = a$.

Kanıt. (i) için Önsav 1.1.4 (ii)'de $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ ve sırasıyla $g(x, y) = \lambda x + \mu y, xy, x/y$ alımsız. (ii) ve (iii) dizilerde olduğu gibi kanıtlanır. ■

$\mathbb{R}$ 'deki bir $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ağına $\alpha \prec \beta$ koşulunu sağlayan her $\alpha, \beta \in \Lambda$ için $x_\alpha \leq x_\beta$ (benzer biçimde $x_\alpha \geq x_\beta$) ise *monoton artan* (benzer biçimde *monoton azalan*) denir.

Önerme 1.1.8 $\mathbb{R}$ 'deki her $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *monoton ağı* $\overline{\mathbb{R}}$ 'de yakınsaktır. (x_α) *monoton artansa* $\lim_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha = \sup_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha$, *monoton azalansa* $\lim_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha = \inf_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha$.

Örnek 1.1.9. $A \subset \mathbb{R}^n$, ξ ise A 'nın bir yığılma noktası ve $f : A \setminus \{\xi\} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Bilindiği gibi

$$\lim_{x \in A \setminus \{\xi\}, x \rightarrow \xi} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \setminus \{\xi\} (\|x - \xi\| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon).$$

Şimdi bu limiti bir ağ limitine dönüştürmek istiyoruz. $\Lambda := A \setminus \{\xi\}$ olsun ve $x, y \in \Lambda$ için

$$x \prec y \iff \|y - \xi\| \leq \|x - \xi\|$$

olarak açıklansın. $(\Lambda, \prec)$ 'de yansımalı ve geçişli özellik aşikar. $x, y \in \Lambda$ keyfi verilsinler. Eğer $\|y - \xi\| \leq \|x - \xi\|$ ise $z = y$, $\|x - \xi\| \leq \|y - \xi\|$ ise $z = x$ alırsak $x \prec z$ ve $y \prec z$ olur. Dolayısıyla $(\Lambda, \prec)$ yukarıya yönelmiştir.

$$\lim_{x \in A \setminus \{\xi\}, x \rightarrow \xi} f(x) = l \iff \lim_{x \in \Lambda} f(x) = l$$

olduğu kolayca görülür. Diğer yandan

$$\lim_{x \in A \setminus \{\xi\}, x \rightarrow \xi} f(x) = l \iff \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{\xi\} (\lim a_n = \xi \implies \lim f(a_n)) \quad (1.7)$$

olduğunu biliyoruz. Bunu ağlara aktarabilir miyiz, aşağıda araştıracağız.

Tanım 1.1.10 $(\Lambda, \prec)$ yukarı doğru yönelmiş bir küme olsun. Bir $(\alpha_n)_{n \geq 1} \subset \Lambda$ dizisine

$$\forall \alpha \in \Lambda \exists n_\alpha \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_\alpha \implies \alpha_n \succ \alpha)$$

sağlanıyorsa Λ 'da **sondaş** denir.

Yukarıdaki örneğimizde Λ 'daki $\lim x_n = \xi$ koşulunu sağlayan her (x_n) dizisi Λ 'da sondaştır. $(\mathbb{N}, \leq)$ ağında ise $\lim k_n = +\infty$ olan diziler sondaştır.

Teorem 1.1.11 (Dizi Ölçütü) Yukarı doğru yönelmiş Λ kümesinde en az bir sondaş dizi bulunsun³. X bir metrik uzay olsun ve X 'te bir $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ağı

³Yukarı doğru yönelmiş her Λ kümesinde bir sondaş dizi olması gerekmez, bkz. Not 2.3.1

verilsin. Bu koşullarda $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ağıının yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her sondaş (α_n) dizisi için (x_{α_n}) dizisinin yakınsak olmasıdır. Her sondaş (α_n) dizisi için (x_{α_n}) dizileri yakınsaksalar bu (x_{α_n}) dizileri aynı a noktasına yakınsarlar ve bu durumda (x_α) ağı da yakınsaktır ve $\lim_\alpha x_\alpha = a$ 'dır.

Kanıt. (1) $\lim_\alpha x_\alpha = a$ olsun. Her sondaş (α_n) dizisi için $\lim x_{\alpha_n} = a$ olduğu tanımlardan kolayca görülür.

(2) Şimdi her sondaş (α_n) dizisi için (x_{α_n}) dizisi yakınsak olsun. Bunların aynı a noktasına yakınsadığını savunuyoruz. Λ 'da da iki $(\alpha_n), (\beta_n)$ sondaş dizi verildiğinde $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots$ fermuar dizisi de Λ 'da sondaştır. Varsayımından $x_{\alpha_1}, x_{\beta_1}, x_{\alpha_2}, x_{\beta_2}$ dizisi bir a noktasına yakınsar. Bunun altdizileri olarak (x_{α_n}) ve (x_{β_n}) dizileri de aynı a noktasına yakınsar. Sonuçta her sondaş (α_n) dizisi için $\lim x_{\alpha_n} = a$ olur.

Bu sağlanmışken $\lim x_\alpha = a$ olmadığını varsayalım. Bu durumda bir sondaş (α_n) dizisi için $x_{\alpha_n} \not\rightarrow a$ olduğunu kanıtlarsak işimiz biter. Varsayımımızdan Λ 'da en az bir (β_n) sondaş dizisi vardır. $\neg(\lim x_\alpha = a)$ olduğundan (1.2)'nin sağ yanını bozan bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır; dolayısıyla her n için

$$\forall \beta_n \prec \alpha \in \Lambda \quad (d(x_\alpha, a) < \varepsilon_0)$$

önermesi yanlıştır, dd her n için bir α_n ögesi $\beta_n \prec \alpha_n$ ve $d(x_{\alpha_n}, a) \geq \varepsilon_0$ olacak biçimde vardır. (α_n) de bir sondaş dizidir ve $d(x_{\alpha_n}, a) \geq \varepsilon_0$ eşitsizliğinden dolayı $x_{\alpha_n} \not\rightarrow a$; işimiz biter. ■

I herhangi bir damga kümesi olmak üzere $\mathcal{S}_I := \{A \subset I \mid I \text{ sonlu}\}$ olsun. $A, B \in \mathcal{S}_I$ olmak üzere

$$A \prec B : \Longleftrightarrow A \subset B$$

olarak açıklanırsa $(\mathcal{S}_I, \prec)$ bir ağıdır.

$(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun. X 'te bir $\{x_i\}_{i \in I}$ ailesi verilsin. Her $A \in \mathcal{S}_I$ için

$$s_\emptyset := 0 \text{ ve } A \neq \emptyset \text{ için } s_A := \sum_{i \in A} x_i$$

olarak açıklansın. $(s_A)_{A \in \mathcal{S}_I}$ ağı yakınsak ve limiti α ise $\{x_i\}_{i \in I}$ **ailesi toplanabilir** ve **toplamı** α 'dır denir ve bu durum $\sum_{i \in I} x_i = \alpha$ olarak gösterilir (bkz. KA I, Tanım 1.4.4). $\{x_i\}_{i \in I}$ ailesi toplanabilir ise $\{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ bir sayılabilir kümedir. $\{x_i\}_{i \in I}$ ailesi toplanabilir ve $I := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_i\}_{i \in I_n}$ toplanabilir ve

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right) \quad (\text{Paketleme Teoremi}).$$

Özel olarak $\{x_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ ailesi toplanabilirse

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}} x_{mn} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{mn} \right).$$

Eğer $X = \mathbb{R}$, $I^+ := \{x_i | x_i > 0\}$, $I^- := \{i \in I | x_i < 0\}$ olmak üzere $\{x_i\}_{i \in I}$ ailesi toplanabilirse $\{x_i\}_{i \in I^+}$, $\{x_i\}_{i \in I^-}$ ve $\{|x_i|\}_{i \in I}$ aileleri de toplanabilir ve

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I^+} x_i + \sum_{i \in I^-} x_i \text{ ve } \sum_{i \in I} |x_i| = \sum_{i \in I^+} x_i - \sum_{i \in I^-} x_i.$$

Bölüm 2

$\mathbb{R}^n$ 'de Hacim ve Riemann İntegrali

Tarım öncesi avcılık döneminde, yaşamımızda önemli yer tutan “sayma” işlemi bizi doğal sayılara götürdü. Tarım dönemiyle birlikte yaşamımıza giren “ölçme”ye ise rasyonel ve gerçel sayıları borçluyuz. Ancak doğal ve rasyonel sayıları matematiksel anlamda sağlam zemine oldukça geç, ondokuzuncu yüzyılda, Dedekind, Cantor, Weierstrass ve Peano gibi matematikçilerin çalışmalarıyla oturttuk.

Yunanlılar ve onlardan önce babilliler ve mısırlılar, düzlemsel bazı A bölgelerine, onların alanları dedikleri bir $v_2(A) \geq 0$ gerçel sayı karşılık getirdiler. Herşeyden önce kenarlarının uzunluğu a, b olan bir R dikdörtgeninin alanını $a \cdot b$ olarak açıkladılar. Bir dikdörtgeni bir köşegenle dik kenarlarının uzunlukları a, b olan iki dik üçgene parçaladılar: Böylece dik kenarlarının uzunlukları a, b olan bir dik üçgeninin alanını $\frac{1}{2}ab$ olarak hesapladılar. Herhangi tipten bir üçgen verildiğinde, uzun kenarlardan birine karşı köşeden bir dik çizerek, üçgeni iki dik üçgene parçaladılar. Böylece her tipten üçgenin alanını hesaplamayı öğrendiler. Üçgenlerin alanından ise, çokgenleri üçgenlere parçalayarak, poligonlarla çevrili bölgelerin alanlarını hesapladılar. Bu alanın şu özellikleri vardır: P, Q çokgen olmak üzere

- (1) *Teklik*: $v_2(P)$ sayısı P 'nin üçgenlere parçalanışından bağımsızdır,
- (2) *Monotonluk*: $P \subset Q$ ise $v_2(P) \leq v_2(Q)$,
- (3) *Toplamsallık*: $\hat{P} \cap \hat{Q} = \emptyset$ ise $v_2(P \cup Q) = v_2(P) + v_2(Q)$.

Ancak bu üç özellik için ne bir kanıt verdiler, ne de bir kanıt girişiminde bulundular; çünkü bunlar, onlar için, apaçık doğrulardır. Bu açık ancak 19. yüzyılda Peano ve Jordan tarafından giderildi.

Yine antik çağda, her sınırlı $A \subset \mathbb{R} (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ kümesinin, yukarıdaki üç koşulu sağlayan ve $[0, +\infty)$ aralığına düşen bir $v_1(A)$ uzunluğu (bir $v_2(A)$)

alanı, bir $v_3(A)$ hacmi) olduğunu tartışmasız varsaydılar.¹ Onlar yalnızca, özellikle bazı geometrik eğrilerin (örneğin bir çemberin uzunluğunu), bir çokgen, daire, elips, koni, silindir veya küre yüzeyinin vs. alanlarını, bir koni, silindir, küre veya elipsoidin vs. hacimlerini, matematik açıdan temiz bir şekilde hesapladılar. Limitle, geometrik kılıkta, ilk kez bu hesaplamalarda karşılaştık. Bu yaklaşım aşağıdaki gibi herhangi bir $\mathbb{R}^n$ 'e taşınarak sağlam zemine oturtuldu.

Henüz limit kavramının netleşmediği o günler için iki harika yöntem geliştirildi. İlki, bölgeyi, içine düşen ve gittikçe genişleyen çokgenlerle tüketerek alanı belirleme (*tüketme yöntemi*), ikincisi ise Arşimed'e ait olan *sıkıştırma yöntemi*, dd bölgeyi çevreleyen eğriyi içeriden, bölgeye düşüp genişleyen, dışarıdan bölgeyi içerip daralan çokgenlerle sıkıştırma yöntemi. Riemann integrali ve Lebesgue integralinin temelinde Arşimed'in sıkıştırma yöntemi yatar. Peano ve Jordan sıkıştırma yöntemini sağlam zemine oturtular; Jordan'ın özel katkısı, kenarları eksenlere koşut poligonlarla çalışmanın yeterli olduğunu göstermiş olmasıdır. Ayrıca Arşimed döneminde bölgemizi çevreleyen eğriler, doğru parçaları veya çember, elips, hiperbol, parabol gibi düzgün eğrilerin yay parçalarından oluşan eğriler olmuştur. Peano ve Jordan, alanını araştırdığımız sınırlı $A \subset \mathbb{R}^2$ kümesinin bir eğriyle çevrelenmiş olması koşulunu da terk ettiler; yine de ∂A sınırı önemli rol oynar.

Jordan yaklaşımının kısa özeti şudur. $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k \leq n$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ için $a_k \leq b_k$ olmak üzere $Q := \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$ tipindeki kümeler kutu denir ve Q 'nin hacmi $v_n(Q) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n)$ olarak açıklanır. Sonlu sayıda kutuların birleşimi olan kümeler çok basit geometrik yapılarıdır; bunlara *figür* diyelim. Her F figürü sonlu sayıda ayrık (veya girişimsiz) $Q_1, \dots, Q_m$ kutularının birleşimi olarak yazılabilir. $\sum_{i=1}^m v_n(Q_i)$ sayısı F 'nin ayrık (veya girişimsiz) kutulara parçalanışından bağımsızdır; onu $v_n(F)$ ile gösterip ona F 'nin (*Jordan*) *hacmi* diyelim.

Şimdi $A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir *sınırlı* küme olsun. A 'ya düşen figürlerin hacimlerinin supremumunu $\underline{j}_n(A)$ ve A 'yı içeren figürlerin hacimlerinin infimumunu ise $\bar{j}_n(A)$ ile gösterelim. $\underline{j}_n(A) = \bar{j}_n(A)$ ise A kümesi **Jordan ölçülebilir** ve bu ortak değere ise A 'nın **Jordan hacmi** denir ve bu değer

¹Böyle düşünmekte haksız da sayılamazlar. İnsanlar pratik yaratıklardır. Yerde bulunduğu herhangi bir taşın hacminin ne olduğunu sorduğunuzda asla, “bakalım bunun bir hacmi var mı?” demez. Mucize sıvı sudan yararlanır. Taşın büyüklüğüne göre, ya onu önceden derecelendirilmiş ve içinde yeterince su bulunan bir kaba koyup artış yardımıyla, ya da ağzına kadar su dolu bir kaba koyup taşın suyun ağırlığı üzerinden taşın hacmini hesapladılar. Bu yöntem fizik ve kimya laboratuvarlarında hala kullanımdadır. Uzaydaki, arap saçına dönmüş bir iplik yumağının uzunluğunu, yumağın ağırlığını bir santimetrelilik ipliğin uzunluğuna bölerek bulur. Uzaydaki herhangi bir yüzeyin alanını, onu homojen uygun bir maddeyle kaplayıp, kaplayan maddenin ağırlığını, o maddenin bir santimetre karelik parçasının ağırlığına bölerek bulabilirsiniz.

$j_n(A)$ ile gösterilir. Bir $S \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı kümesine, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir F figürü, $S \subset F$ ve $v_n(F) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabiliyorsa **sıfır hacimlidir** denir. Bir sınırlı $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Jordan ölçülebilir olmasının, ∂A 'nın sıfır hacimli olmasına denk olduğu kolayca görülür.

$\mathcal{J}^n$ ve $j_n : \mathcal{J}^n \rightarrow [0, +\infty)$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

$\mathcal{J}^n$ bir **halkadır**, dd $\emptyset \in \mathcal{J}^n$ ve her $A, B \in \mathcal{J}^n$ için $A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{J}^n$.

$j_n(\emptyset) = 0$ ve $A, B \in \mathcal{J}^n$ ayrıkta $j_n(A \sqcup B) = j_n(A) + j_n(B)$ (**sonlu toplamsallık**).

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir hareket ve $A \in \mathcal{J}^n$ ise $j_n(T(A)) = j_n(A)$ (**hareketlere göre değişmezlik**).

$Q[0, 1] = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1] \in \mathcal{J}^n$ ve $j_n(Q[0, 1]) = 1$ (**normlaştırma**).

$\mathcal{J}^n$ ve j_n 'in temel özellikleri *sınırlılık* ve *sonluluktur*: (a) Her $A \in \mathcal{J}^n$ için A bir *sınırlı* altküme ve $0 \leq j_n(A) < +\infty$, dd $j_n(A)$ negatif olmayan bir *sonlu* sayı, (b) $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{J}^n$ ise $A_1 \cup \cdots \cup A_k \in \mathcal{J}^n$, dd $\mathcal{J}^n$ *sonlu* birleşimlere göre kapalı ve ayrıca A_i 'ler ayrıkta $j_n(\bigsqcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k j_n(A_i)$, dd j_n *sonlu* toplamsaldır.

Bırakalım $\mathcal{J}^n = \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ olmasını, $\mathcal{J}^n$ bazı sınırlı açık kümeleri bile içermez (bkz. Örnek 2.2.15(2)). Sonlu toplamsallıktan sayılabilir toplamsallığa geçme fikrini ilk Borel (1898) ortaya atmıştır. Sonra Lebesgue tezinde (1903) bu düşüncüyü sürdürmüş ve ortaya bir Ölçü Problemi koymuştur. $\mathfrak{P}_s(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ 'nin sınırlı altkümelerinin ailesini gösterelim.

Lebesgue Ölçü Problemi: *Sayılabilir toplamsal, hareketlere göre değişmez ve normlandırılmış bir $\mu : \mathfrak{P}_s(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu bulunuz.*

Burada **sayılabilir toplamsallıktan** şunu anlıyoruz: Her sayılabilir ve ayrık $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{P}_s(\mathbb{R}^n)$ ailesi için $\bigcup_{i \in I} A_i$ sınırlı ise

$$\mu \left(\bigsqcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

Lebesgue Ölçü Problemi'nin hiçbir $n \in \mathbb{N}^*$ için bir çözümü yoktur (bkz [21], [13] Teorem 3.6.4). Lebesgue Ölçü Problemi'nden esinlenerek Hausdorff, Hacim Problemi'ni formüle etmiştir. Bu problemde $A \subset \mathbb{R}^n$ altkümesinin sınırlı olması koşulu terk edilmiş, ayrıca $\mu(A)$ 'nın $+\infty$ olmasına izin vermiştir. Benzer değişikliklerle Lebesgue Ölçü Problemi, Ölçü Problemine dönüştürülmüştür. Bunlar aşağıdaki gibidir:

Hacim Problemi: *Sonlu toplamsal, hareketlere göre değişmez ve normlandırılmış bir $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu bulunuz.*

Ölçü Problemi: *Sayılabilir toplamsal, hareketlere göre değişmez ve normlandırılmış bir $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu bulunuz.*

Bindokuzyüzlü yılların başında ortaya konan bu problemler, antik çağda, düzlemde (veya uzayda) hangi kümelerin alanı (veya hacmi) olduğu sorusu-

nun niye tartışılmadığını anlamamızı sağlar. Çünkü sağduyumuz bize her iki problemin de bir çözümü olduğunu söyler. Ancak sağduyumuz bizi yanıltmıştır.

Teorem: (Hausdorff, 1914) $n \geq 3$ için *Hacim Problemi'nin çözümü yoktur* ([21]).

Teorem: (Banach, 1923) $n = 1, 2$ için *Hacim Problemi'nin çözümleri vardır; ancak bu çözümler tek olarak belli değildirler*.

Neumann, Hacim Problemi'nin boyuta bağlılığının nedeninin, $\mathbb{R}^n$ 'nin hareketler grubunun cebirsel yapısıyla ilişkili olduğunu kanıtlamıştır ([30]). Hacim Problemi'nin çözümsüzlüğünü aşağıdaki şaşırtan teoremden çok net görürüz.

Teorem: (*Hacim Probleminin Çözülemezliği*) $n \geq 3$ olsun. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve $\mathring{A} \neq \emptyset, \mathring{B} \neq \emptyset$ ise $C_1, \dots, C_k \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri ve $T_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq k$ hareketleri

$$A = \bigsqcup_{i=1}^k C_i \text{ ve } B = \bigsqcup_{i=1}^k T_i(C_i)$$

olacak biçimde bulunabilir (*Banach-Tarski, 1924*).

Bu inanılmaz bir sonuçtur. Örneğin $p, q \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere, A orijin merkezli birim top, B ise p tane 10^q yarıçaplı ayrık topun birleşimi olsun. Banach-Tarski Teoremi, birim topu, $C_1, \dots, C_k$ uygun ayrık kümelerine parçalayıp, bunların her birini bir T_i hareketi ile taşıyarak p tane 10^q yarıçaplı ayrık top elde edebileceğimizi söyler. Bu, bugün bile çoğu insanın kabul edemeyeceği bir sonuçtur. Bu şaşırtan sonucun nedeni, $C_1, \dots, C_k$ kümelerinin, Kümeler Kuramı'nın Seçme Aksiyomu ile oluşturulmuş, gözümüzde canlandıramayacağımız kadar karmaşık olmalarıdır.

Vitali 1905'te Ölçü Problemi'nin $n = 1$ için çözülemez olduğunu kanıtlamıştır. Banach ve Tarski bunu genelleştirdiler.

Teorem (*Ölçü Problemi'nin Çözülemezliği*): $n \in \mathbb{N}^*$ olsun. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ve $\mathring{A} \neq \emptyset, \mathring{B} \neq \emptyset$ ise sayılabilir çokluktaki $C_i \subset \mathbb{R}^n, i \in I$ kümeleri ve $T_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, i \in I$ hareketleri

$$A = \bigsqcup_{i \in I} C_i \text{ ve } B = \bigsqcup_{i \in I} T_i(C_i)$$

olacak biçimde bulunabilir (*Banach-Tarski, 1924*).

Hacim ve Ölçü Problemleri'nin bir çözümü olabilmesi için μ ölçülerinin tanım kümelerini daraltmak zorundayız. $\mathbb{R}^n$ 'deki kutuların kümesi $\mathcal{Q}^n$ olsun. $\mathcal{Q}^n \subsetneq \mathcal{J}^n \subsetneq \mathfrak{P}_s(\mathbb{R}^n)$ koşulunu sağlayan bir $\mathcal{J}^n$ halkası ve orada tanımlı, sonlu toplamsal, hareketlere göre değişmez ve normlandırılmış bir $j_n : \mathcal{J}^n \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu vereceğiz. Hacim Problemi'nin bu çözümü bizi Riemann integrale götürecektir. Ölçü Problemi'nin ise, $\mathcal{J}^n \subsetneq \mathcal{L}^n \subsetneq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ koşulunu

sağlayan bir $\mathcal{L}^n$ σ -cebiri ve bir $\lambda_n : \mathcal{L}^n \rightarrow [0, +\infty]$ ölçüsünden oluşan bir çözümünü vereceğiz. Bu bizi Lebesgue integraline götürecektir.

Newton ve Leibniz şöyle bir problemle karşılaştılar: Bir $I = [a, b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonu için bu aralıkta tanımlı ve türevi f olan bir F fonksiyonu bulunuz. Örneğin I bir zaman aralığı ve f bir parçacığın ivme fonksiyonu ise aradığımız F bu parçacığın hız fonksiyonudur; burada $F(a)$ 'nın ne olacağı önceden verilir. Bu problemin görünüşte alan ve integralle hiç bir ilişkisi yoktur. KarşıtÜrev Teoremi 2.7.5 ile türev ve integralin güzel bir biçimde buluştuğunu, bir anlamda birbirinin zıttı işlemler olduğunu öğreneceğiz.

2.1 $\mathbb{R}^n$ 'de Özel Yarıhalkalar, Halkalar ve Hacimler

$a, b \in \mathbb{R}$ için $a \leq b$ olmak üzere $\langle a, b \rangle$ aralığı (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ ve $[a, b]$ aralıklarından herhangi birini gösterecektir. $a = b$ ise $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \emptyset$ ve $[a, a] = \{a\}$ **bozuk** aralıklarımı elde ederiz.

$n \in \mathbb{N}^*$ ve $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$a < b : \Longleftrightarrow a_k < b_k, k = 1, \dots, n$$

$$a \leq b : \Longleftrightarrow a_k \leq b_k, k = 1, \dots, n$$

olarak açıklansın. $a \leq b$ için $I_k = \langle a_k, b_k \rangle$ olmak üzere

$$Q = I_1 \times \dots \times I_n = \langle a_1, b_1 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle$$

kümesine bir **n -kutusu** (veya kısaca **kutu**) diyelim. I_k aralıklarından herhangi biri bozuksa Q kutusuna da **bozuk** denir. Kutular ve sonlu sayıda kutunun birleşimi olan kümeler en basit geometrik kümelerdir.

$$\mathcal{Q}^n := \{Q \langle a, b \rangle \mid a, b \in \mathbb{R}^n \text{ ve } a \leq b\} \text{ ve } \mathcal{F}^n := \left\{ \bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subset \mathcal{Q}^n \text{ sonlu} \right\} \quad (2.1)$$

olsun. $\mathcal{F}^n$ 'nin öğelerine **figür** diyeceğiz.

$a, b \in \mathbb{R}^n$ ve $a \leq b$ olmak üzere

$$Q[a, b] := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n], \quad Q(a, b] := (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$$

$$Q(a, b) := (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n), \quad Q[a, b] := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

kümelerine sırasıyla, köşeleri a, b olan bir **sağdan yarıaçık kutu**, **soldan yarıaçık kutu**, **açık kutu** ve **kapalı kutu** diyelim.

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_r^n &:= \{Q[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}^n \text{ ve } a \leq b\}, \quad \mathcal{F}_r^n := \{\bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subset \mathcal{Q}_r^n \text{ sonlu}\} \\ \mathcal{Q}_l^n &:= \{Q(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}^n \text{ ve } a \leq b\}, \quad \mathcal{F}_l^n := \{\bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subset \mathcal{Q}_l^n \text{ sonlu}\} \\ \mathcal{Q}_a^n &:= \{Q(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^n \text{ ve } a \leq b\}, \quad \mathcal{Q}_k^n := \{Q[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}^n \text{ ve } a \leq b\}\end{aligned}$$

olsunlar. $\mathcal{F}_r^n$ ($\mathcal{F}_l^n$) sonlu sayıda sağdan (soldan) yarıaçık kutuların birleşimlerinin kümesidir.

Lemma 2.1.1 (Tanım) $\mathcal{Q}^n$, $\mathcal{Q}_r^n$, $\mathcal{Q}_l^n$ küme aileleri $\mathbb{R}^n$ 'de birer **yarıhalka**-dırılar, dd $\mathcal{Y}$ bu ailelerden herhangi birini göstermek üzere:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{Y}$ ve $A, B \in \mathcal{Y}$ ise $A \cap B \in \mathcal{Y}$ ve
- (ii) $A, B \in \mathcal{Y} \implies \exists I \text{ sonlu } \exists \{C_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{Y} \text{ ayrık, öyle ki } A \setminus B = \bigsqcup_{i=1} C_i$.

Kanıt. Savı, bizi özde ilgilendiren, $\mathcal{Q}^n$ için kanıtlayacağız; diğerleri benzer biçimde kanıtlanır.

(1) $n=1$ olsun.

- (i) $\emptyset = (a, a) \in \mathcal{Q}^1$. $I = \langle a, b \rangle$, $J = \langle c, d \rangle$ ve $I, J \in \mathcal{Q}^1$, $I \cap J \neq \emptyset$ ise

$$(\max(a, c), \min(b, d)) \subset I \cap J \subset [\max(a, c), \min(b, d)].$$

Dolayısıyla $I \cap J \in \mathcal{Q}^1$.

(ii) $I, J \in \mathcal{Q}^1$ yukarıdaki gibi olsunlar. $I \cap J \in \mathcal{Q}^1$ ve $I \setminus J = I \setminus (I \cap J)$ olduğundan $J \subset I$ alınabilir. $I' = \{x \in I \setminus J \mid x \leq c\}$ ve $I'' = \{x \in I \setminus J \mid x \geq d\}$ olsun. $I' \cap I'' \neq \emptyset$ ise $c = d$, dolayısıyla $J = \emptyset$ ve $I \setminus J = I \in \mathcal{Q}^1$. Diğer durumda

$$(a, c) \subset I' \subset [a, c] \text{ ve } (d, b) \subset I'' \subset [d, b].$$

Böylece $I' = \langle a, c \rangle$, $I'' = \langle d, b \rangle \in \mathcal{Q}^1$ ve $I \setminus J = I' \sqcup I'' \in \mathcal{Q}^1$. Böylece $\mathcal{Q}^1$, (i) ve (ii)'yi sağlar, dolayısıyla bir yarıhalkadır.

(2) Önce $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ yarı halkalarsa

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

'nin bir yarıhalka olduğunu görelim. Her şeyden önce $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{A} * \mathcal{B}$. Şimdi $A, C \in \mathcal{A}$ ve $B, D \in \mathcal{B}$ olsun. Bu durumda $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{A} * \mathcal{B}$ olur. Diğer yandan

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = [(A \setminus C) \times B] \sqcup [(A \cap C) \times (B \setminus D)].$$

Sonlu I, J ve ayrık $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ ve $\{B_j\} \subset \mathcal{B}$ aileleriyle $A \setminus C = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ ve $B \setminus D = \bigsqcup_{j \in J} B_j$. Sonuçta $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ bir yarıhalkadır.

Özellikle $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}^1 * \mathcal{Q}^1$ bir yarı halkadır. Gerisi tümevarımdır. ■

Uyarı 2.1.2. $\mathcal{Q}_a^n$ ve $\mathcal{Q}_k^n$ birer yarıhalka değildirler. Gerçekten de $Q, Q' \in \mathcal{Q}_a^n$ (veya $\in \mathcal{Q}_k^n$) ve $Q \neq Q \cap Q' \neq \emptyset$ ise $Q \setminus Q'$ sonlu sayıda açık (veya kapalı) kutunun birleşimi olarak yazılamaz.

Lemma 2.1.3 $Q, Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{Q}^n$ ise $Q \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k} Q_i = \bigsqcup_{1 \leq j \leq m} Q'_j$ olacak biçimde $Q'_1, \dots, Q'_m$ ayrık kutuları bulunabilir.

Kanıt. k üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. Önsav 2.1.1'den dolayı $k = 1$ için sav doğrudur. Şimdi sav k için kanıtlanmış olsun. Bu durumda tümevarım koşulundan, ayrık $Q'_1, \dots, Q'_m \in \mathcal{Q}^n$ ile $Q \setminus \bigcup_{i=1}^k Q_i = \bigsqcup_{i=1}^m Q'_i$, dolayısıyla

$$Q \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} Q_i = \left(Q \setminus \bigcup_{i=1}^k Q_i \right) \setminus Q_{k+1} = \left(\bigsqcup_{i=1}^m Q'_i \right) \setminus Q_{k+1} = \bigsqcup_{i=1}^m (Q'_i \setminus Q_{k+1})$$

olur. Yarıhalka tanımından her bir $Q'_i \setminus Q_{k+1}$ kümesi, $\mathcal{Q}^n$ 'ye ait sonlu sayıda ayrık kümenin birleşimi olduğundan sonuçta $Q \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} Q_i$ kümesi $\mathcal{Q}^n$ 'ye ait sonlu sayıda ayrık kümenin birleşimidir. ■

Sonuç 2.1.4 (Tanım) $\mathcal{F}^n$ bir halkadır, dd

$$\emptyset \in \mathcal{F}^n \text{ ve her } A, B \in \mathcal{F}^n \text{ için } A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{F}^n.$$

Kanıt. $\emptyset \in \mathcal{F}^n$ olduğu apaçıktır. $A, B \in \mathcal{F}^n$ ise $A \cup B$ olduğu aşıkardır. Şimdi $A = \bigcup_{i=1}^k Q_i$ ve $B = \bigcup_{j=1}^m Q'_j$ olsun. Önsav 2.1.3'ten $Q_i \setminus Q'_j$ sonlu sayıda Q_{ijl} kutusunun birleşimidir. Sonuçta

$$A \setminus B = \bigcup_i \left(Q_i \setminus \bigcup_j Q'_j \right) = \bigcup_i \bigcup_{j,l} Q_{ijl} \in \mathcal{F}^n.$$

■

$\mathcal{F}^n$ bir halka olduğundan $A, B \in \mathcal{F}^n$ ise $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ özdeşliklerinden $A \cap B, A \triangle B \in \mathcal{F}^n$ olur. Yine tümevarımla $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{F}^n$ ise

$$F_1 \cap \dots \cap F_k \in \mathcal{F}^n \text{ ve } F_1 \cup \dots \cup F_k \in \mathcal{F}^n.$$

Sonuç 2.1.5 (Parçalama) Her $F \in \mathcal{F}^n$ figürü sonlu sayıda ayrık kutunun birleşimi olarak yazılabilir.

Kanıt. $Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{Q}^n$ ile $F = \bigcup_i Q_i$ olsun. $A_1 := Q_1$ ve $1 < i \leq k$ için $A_i := Q_i \setminus \bigcup_{1 \leq j < i} Q_j$ olsun. Bu durumda $F = \bigsqcup_{1 \leq i \leq k} A_i$ ve Önsav 2.1.3'ten dolayı ise her bir A_i sonlu sayıda ayrık kutunun birleşimidir; işimiz biter. ■

Bir $v_n : \mathcal{Q}^n \rightarrow [0, +\infty)$ hacmi tanımlayacağız. $Q = \prod_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle \in \mathcal{Q}^n$ olmak üzere

$$v_n(Q) \equiv v_n(\langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle) := \prod_{k=1}^n (b_k - a_k) \quad (2.2)$$

sayısına Q kutusunun kutusunun **hacmi** denir. Eğer en az bir k için $a_k = b_k$, ancak $I_k \neq [a_k, a_k]$ ise $I_k = \emptyset$, dolayısıyla $Q = \emptyset$ ve $v_n(\emptyset) = 0$ olur. Yine her bozuk Q kutusu için $v_n(Q) = 0$. Diğer yandan $Q(a, a) = Q[a, a] = Q(a, a] = \emptyset$ ve $Q[a, a] = \{a\}$ olduğunu ayrıca belirtelim. Dolayısıyla tek noktadan oluşan kümelerimiz de, hacmi 0 olan, bir kutudur. Ayrıca tanım gereği ²

$$v_n(\mathring{Q}) = v_n(Q) = v_n(\overline{Q}). \quad (2.3)$$

$Q = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$ ve $c_k \in \{a_k, b_k\}$ ise

$$S := \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_{k-1}, b_{k-1} \rangle \times \{c_k\} \times \langle a_{k+1}, b_{k+1} \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$$

tipindeki kümelere Q kutusunun **yüzeyleri** denir. Yüzeyler bozuk n -kutularıdır.

$Q = I_1 \times \cdots \times I_n = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$ ve $a_k \leq c_k \leq b_k$ ise $I_k = \langle a_k, b_k \rangle$ aralığı, uç noktaları a_k, c_k, b_k olmak üzere, en fazla iki farklı biçimde, iki ayrık I'_k, I''_k 1-kutusuna parçalanır. Örneğin $a_k < c_k < b_k$ ise bu seçenekler $\langle a_k, c_k \rangle$, $[c_k, b_k]$ ve $\langle a_k, c_k \rangle$, (c_k, b_k) parçalanışlarıdır. Her durumda

$$Q = I_1 \times \cdots \times I'_k \times \cdots \times I_n \sqcup I_1 \times \cdots \times I''_k \times \cdots \times I_n =: Q' \sqcup Q'' \text{ ve } v_n(Q) = v_n(Q') + v_n(Q'').$$

Eğer $Q \in \mathcal{F}_r^n$ sağdan yarı açık bir kutu ise $I'_{rk} = [a_k, c_k)$ ve $I''_{rk} = [c_k, b_k)$ olarak Q kutusunu sağdan yarıaçık Q'_r, Q''_r kutularına yine $v_n(Q) = v_n(Q') + v_n(Q'')$ olacak biçimde parçalarız. Benzeri soldan yarıaçık kutular için geçerlidir.

$Q, Q_1, \dots, Q_m \in \mathcal{Q}^n$ ve $i \neq j$ olmak üzere $\mathring{Q}_i \cap \mathring{Q}_j = \emptyset$ ve $Q = \bigcup_{i=1}^m Q_i$ ise $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ 'e Q 'nın bir **girişimsiz parçalanışı** denir. Eğer I_k aralığını girişimsiz $J'_k := \langle a_k, c_k \rangle$ ve $J''_k = [c_k, b_k)$ aralıklarına parçalarsak girişimsiz $P' = I_1 \times \cdots \times J'_k \times \cdots \times I_n$ ve $P'' = I_1 \times \cdots \times J''_k \times \cdots \times I_n$ kutularıyla $v_n(Q) = v_n(P') + v_n(P'')$

$$Q = P' \cup P'' \text{ ve } v_n(Q) = v_n(P') + v_n(P'')$$

²Aslında $\mathring{Q} \subset K \subset \overline{Q}$ koşulunu sağlayan bir K kümesine kutu deyip $v_n(K) := v_n(\overline{Q})$ olarak açıklamak işleri çok daha yalınlaştırır.

elde ederiz. Tümevarımla aşağıdaki savı elde ederiz.

Lemma 2.1.6 *Bir Q kutusu, sonlu sayıda hiperdüzlemlerle ayrık (veya girişimsiz) $Q_1, \dots, Q_m$ kutularına nasıl parçalanırsa parçalansın daima $v_n(Q) = \sum_{i=1}^m v_n(Q_i)$.*

Önerme 2.1.7 (Tanım) $v_n : \mathcal{Q}^n \rightarrow [0, +\infty)$ bir **hacim**dir, dd $v_n(\emptyset) = 0$ ve

$$Q_1, \dots, Q_m \in \mathcal{Q}^n \text{ ayrık ve } \bigsqcup_{k=1}^m Q_k \in \mathcal{Q}^n \text{ ise } v_n \left(\bigsqcup_{k=1}^m Q_k \right) = \sum_{k=1}^m v_n(Q_k). \quad (2.4)$$

(2.4) şöyle de söylenebilir: Bir $Q \in \mathcal{Q}^n$ kutusunu, $Q_1, \dots, Q_m \in \mathcal{Q}^n$ ayrık kutularına nasıl parçalarsak parçalayalım hep $v_n(Q) = \sum_{k=1}^m v_n(Q_k)$. Bu sav $Q_1, \dots, Q_m$ girişimsiz olduğunda da doğrudur.

Sonuç 2.1.8 Bu sav $\mathcal{Q}^n$ yerine $\mathcal{Q}_r^n$ veya $\mathcal{Q}_l^n$ aldığımızda da doğrudur.

Kanıt. Savı parçalanışlar için vereceğiz; girişimsiz parçalanışlar için kanıt aynıdır.

$\emptyset \in \mathcal{Q}^n$ ve tanım gereği $v_n(\emptyset) = 0$. Eğer Q bir bozuk kutu ise her bir Q_k kutusu da zorunlu olarak bozuktur. Bozuk kutuların hacimleri 0 olduğundan sav doğrudur.

Şimdi Q kutumuz bozuk olmasın ve bozuk olmayan $Q_1, \dots, Q_m$ kutularına parçalanmış ve $Q_i = \langle a_{i1}, b_{i1} \rangle \times \dots \times \langle a_{in}, b_{in} \rangle$ olsun.

$$x_j = a_{ij} \text{ ve } x_j = b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \text{ ve } j = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

hiperdüzlemlerini ele alalım. Her bir Q_i kutumuz, bu hiperdüzlemlerin belli bir kısmıyla, ayrık $Q_{i1}, \dots, Q_{ip_i}$ kutularına $v_n(Q_i) = \sum_{j=1}^{p_i} v_n(Q_{ij})$ olacak biçimde parçalanır (bkz. Önsav 2.1.6). (2.5)'teki tüm hiperdüzlemler ise Q kutumuzu ayrık $Q_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p_i$ kutularına parçalar ve Önsav 2.1.6'dan

$$v_n(Q) = \sum_{i,j} v_n(Q_{ij}) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{p_i} v_n(Q_{ij}) \right) = \sum_{i=1}^m v_n(Q_i).$$

■

Teorem 2.1.9 $v_n : \mathcal{Q}^n \rightarrow [0, +\infty)$ hacmi tek bir biçimde bir $\hat{v}_n : \mathcal{F}^n \rightarrow [0, +\infty)$ hacmine genişletilir.

Kanıt. $F \in \mathcal{F}^n$ keyfi verilsin. Sonuç 2.1.5'ten dolayı sonlu sayıda ayrık $Q_1, \dots, Q_k$ kutularıyla $F = \bigsqcup_{i=1}^k Q_i$. Eğer $\hat{v}_n$ hacmi varsa, bu durumda $\hat{v}_n(F) = \sum_{i=1}^n \hat{v}_n(Q_i) = \sum_{i=1}^n v_n(Q_i)$ olmalıdır. Biz $\hat{v}_n(F) := \sum_{i=1}^n v_n(Q_i)$ olarak tanımlıyoruz. Bu tanımın kusursuz olduğunu görelim. Aynı zamanda $Q'_1, \dots, Q'_m \in \mathcal{F}^n$ olmak üzere $F = \bigsqcup_{j=1}^m Q'_j$ olsun. $v_n : \mathcal{Q}^n \rightarrow [0, +\infty]$ bir hacim olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_n(Q_i) &= \sum_{i=1}^n v_n \left(Q_i \cap \bigsqcup_{j=1}^m Q'_j \right) = \sum_{i=1}^n v_n \left(\bigsqcup_{j=1}^m Q_i \cap Q'_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_n(Q_i \cap Q'_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n v_n(Q'_j \cap Q_i) \\ &= \sum_{j=1}^m v_n \left(Q'_j \cap \bigsqcup_{i=1}^n Q_i \right) = \sum_{j=1}^m v_n(Q'_j). \end{aligned}$$

Dolayısıyla tanımımız kusursuzdur. Tanım gereği $\hat{v}_n|_{\mathcal{F}^n} = v_n$ ve teklik tanımdan aşıkardır. Ayrıca $\hat{v}_n(\emptyset) = 0$ ve ayrık $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^n$ için $\hat{v}_n(F_1 \sqcup F_2) = \hat{v}_n(F_1) + \hat{v}_n(F_2)$ olduğu doğrudan $\hat{v}_n$ 'nin tanımından çıkar. Buradan tümevarımla $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{F}^n$ figürleri ayrık ve $F = \bigsqcup F_i$ ise $\hat{v}_n(F) = \sum_i \hat{v}_n(F_i)$ olur. $\blacksquare$

Not. Benzer biçimde $v_{nr} := v_n|_{\mathcal{Q}_r^n}$, $v_{nl} := v_n|_{\mathcal{Q}_l^n}$ olarak açıklanan dönüşümler sırasıyla $\mathcal{Q}_r^n$ ve $\mathcal{Q}_l^n$ 'de birer hacimdirler ve bunlar benzer biçimde $\mathcal{F}_r^n$ ve $\mathcal{F}_l^n$ halkalarında bir $\hat{v}_{nr}$ ve $\hat{v}_{nl}$ hacimlerine genişletilirler. Kimi yazarlar bunlardan herhangi biri ile çalışır. $\blacktriangle$

Uzlaşma: Bundan sonra yalınlık açısından $\hat{v}_n$ hacmini de yalın olarak v_n ile göstereceğiz. v_n 'e $\mathbb{R}^n$ 'nin **temel hacmi** diyelim.

$v_n : \mathcal{F}^n \rightarrow [0, +\infty)$ hacmi **monotondur**, dd

$$A, B \in \mathcal{F}^n \text{ ve } A \subset B \text{ ise } v_n(A) \leq v_n(B).$$

Bu doğrudan $B = A \sqcup (B \setminus A)$ ve $v_n(B) = v_n(A) + v_n(B \setminus A)$ eşitliklerinden çıkar.

Şimdi $A, B \in \mathcal{F}^n$ ise $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \sqcup B$ olduğundan

$$v_n(A \cup B) = v_n((A \setminus (A \cap B))) + v_n(B) \leq v_n(A) + v_n(B)$$

elde edilir. Buradansa tümevarımla

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}^n \implies v_n \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n v_n(A_i) \text{ (alttoplamsallık)} \quad (2.6)$$

$A, B \in \mathcal{F}^n$ ise $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$, $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$ ve $B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ olduğundan $v_n(A) = v_n(A \setminus B) + v_n(A \cap B)$ ve $v_n(B) = v_n(A \cap B) + v_n(B \setminus A)$.

$$\begin{aligned} v_n(A \cup B) &= v_n(A \setminus B) + v_n(A \cap B) + v_n(B \setminus A) \implies \\ v_n(A \cup B) + v_n(A \cap B) &= v_n(A \setminus B) + v_n(A \cap B) + v_n(A \cap B) + v_n(B \setminus A) \\ v_n(A \cup B) + v_n(A \cap B) &= v_n(A) + v_n(B) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Buradan

$$v_n(A \cap B) < +\infty \text{ olduğundan } v_n(A \cup B) = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B). \quad (2.8)$$

Not 2.1.10 Bize herhangi bir $F \in \mathcal{F}^n$ figürü verilsin. F figürü ayrık $Q_1, \dots, Q_k$ kutularının birleşimi olarak yazılabilir. $F_o := \bigcup_{i=1}^k \overset{\circ}{Q}_i$ ve $F_c = \bigcup_{i=1}^k \overline{Q}_i$ olsun. Bu durumda F_o bir açık figür, F_c ise bir kapalı figürdür ve

$$F_o \subset F \subset F_c \text{ ve } v_n(F_o) = v_n(F) = v_n(F_c). \quad (2.9)$$

▲

2.2 Jordan Hacmi

$\mathbb{R}^n$ 'deki $v_n : \mathcal{F}^n \rightarrow [0, +\infty)$ hacmini, $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{J}^n \subset \mathfrak{P}_s(\mathbb{R}^n)$ koşulunu sağlayan bir $\mathcal{J}^n$ halkasında, bir $j_n : \mathcal{J}^n \rightarrow [0, +\infty)$ hacmine genişleteceğiz. $A \subset \mathbb{R}^n$ bir sınırlı küme olsun. Eğer A 'nın bir $j_n(A)$ hacmi olacaksa ve j_n hacmi v_n hacmini genişletecekse, $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^n$ ve $F_1 \subset A \subset F_2$ ise $v_n(F_1) = j_n(F_1) \leq j_n(A) \leq j_n(F_2) = v_n(F_2)$ olmak zorundadır. $j_n(A)$ 'nın tanımı için tek seçenek kalıyor.

Tanım 2.2.1 Bir sınırlı $A \subset \mathbb{R}^n$ altkümesi verilsin. A 'nın $\bar{j}_n(A)$ **dış Jordan hacmi** ve $\underline{j}_n(A)$ **iç Jordan hacmi** şöyle tanımlanırlar: $\underline{j}_n(\emptyset) := 0$ ve

$$\bar{j}_n(A) := \inf\{v_n(F) \mid A \subset F \in \mathcal{F}^n\} \quad (2.10)$$

$$\underline{j}_n(A) := \sup\{v_n(F) \mid F \in \mathcal{F}^n \text{ ve } F \subset A\}, \quad A \neq \emptyset. \quad (2.11)$$

$\bar{j}_n(A) = \underline{j}_n(A)$ durumunda A kümesine **Jordan ölçülebilir**³, ve $j_n(A) := \bar{j}_n(A) = \underline{j}_n(A)$ ortak değerine ise A kümesinin **Jordan hacmi** denir. $\mathbb{R}^n$ 'deki Jordan ölçülebilir kümelerin kümesini $\mathcal{J}^n$ ile göstereceğiz.

Her şeyden önce her $F \in \mathcal{F}^n$ Jordan ölçülebilir ve $j_n(F) = v_n(F)$. Tanım gereği $\underline{j}_n, \bar{j}_n : \mathfrak{P}_s(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty)$ dönüşümleri monotonudur.

³Jordan ölçülebilir yerine **kutulanabilir** de denmektedir.

Önerme 2.2.2 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı olmak üzere

(i)

$$\underline{j}_n(\overset{\circ}{A}) = \underline{j}_n(A) \text{ ve } \bar{j}_n(A) = \bar{j}_n(\bar{A}). \quad (2.12)$$

(ii)

$$\bar{j}_n(A \cup B) + \bar{j}_n(A \cap B) \leq \bar{j}_n(A) + \bar{j}_n(B) \quad (2.13)$$

(iii)

$$\underline{j}_n(A \cup B) + \underline{j}_n(A \cap B) \geq \underline{j}_n(A) + \underline{j}_n(B) \quad (2.14)$$

Kanıt. (i) (2.9)'dan dolayı (2.10)'da F' leri kapalı ve (2.11)'de F' leri açık veya $F \subset \overset{\circ}{A}$ seçebiliriz ve bu savı verir. Veya şöyle de görebiliriz. $\underline{j}_n$ 'nin monotonluğundan $\underline{j}_n(\overset{\circ}{A}) \leq \underline{j}_n(A)$ aşıkardır. Diğer yandan $F \subset A$ koşulunu sağlayan her F figürü için $\bar{F} \subset \bar{A}$, dolayısıyla $v_n(F) = \underline{j}_n(\bar{F}) = \underline{j}_n(\overset{\circ}{A})$. Buradan, $F \subset A$ keyfi olduğundan, $\underline{j}_n(A) \leq \underline{j}_n(\overset{\circ}{A})$ elde edilir. Bu eşitsizliğin ters yönü az önce gösterildi; sonuçta $\underline{j}_n(\overset{\circ}{A}) = \underline{j}_n(A)$. Savın diğer yarısı benzer biçimde kanıtlanır.

(ii) $F, F' \in \mathcal{F}^n$ ve $A \subset F, B \subset F'$ ise $A \cup B \subset F \cup F'$ ve $A \cap B \subset F \cap F'$ olur. Dolayısıyla (2.7) ile

$$\bar{j}_n(A \cup B) + \bar{j}_n(A \cap B) \leq v_n(F \cup F') + v_n(F \cap F') = v_n(A) + v_n(B). \quad (2.15)$$

$v_n(F)$ ve $v_n(F')$ sayıları $\bar{j}_n(A)$ ve $\bar{j}_n(B)$ 'ye istenildiği kadar yakın seçilebilirler; sav buradan çıkar. (iii) ise (ii)'ye benzer kanıtlanır. ■

(2.15)'ten

$$\bar{j}_n(B) = 0 \implies \bar{j}_n(A \cup B) = \bar{j}_n(A)$$

elde edilir. Tümevarımla (2.13) ve (2.14) bağıntıları sonlu sayıda $A_1, \dots, A_k$ sınırlı kümelerine aktarılırlar. Q herhangi bir bozuk olmayan kapalı kutu ve $\alpha := v_n(Q)$ olsun. $A := Q \cap \mathbb{Q}^n$ ve $B := Q \setminus A$ olsun. $\bar{A} = \bar{B} = Q$ ve $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B} = \emptyset$ olduğundan Önerme 2.2.2 ile $1 = \bar{j}_n(Q) = \bar{j}_n(A) = \bar{j}_n(B)$ ve $0 = \underline{j}_n(\emptyset) = \underline{j}_n(A) = \underline{j}_n(B)$ olur. Sonuçta $Q = A \sqcup B$ olmasına karşın $\bar{j}_n(Q) = 1 \neq 2 = \bar{j}_n(A) + \bar{j}_n(B)$ ve $\underline{j}_n(Q) = 1 \neq 0 + 0 = \underline{j}_n(A) + \underline{j}_n(B)$. Özetle ne $\bar{j}_n$ ne de $\underline{j}_n$ toplamsal değildir! Herhangi sınırlı A, B kümelerine, bir F_0 figürü, $A \subset F_0$ ve B ile F_0 girişimsiz olacak biçimde bulunabiliyorsa, F_0 figürü ile **birbirinden ayrılmışlardır** diyelim.

Önerme 2.2.3 $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı kümeleri bir figürle birbirlerinden ayrılmışlarsa

$$\bar{j}_n(A_1 \cup A_2) = \bar{j}_n(A_1) + \bar{j}_n(A_2) \text{ ve } \underline{j}_n(A_1 \cup A_2) = \underline{j}_n(A_1) + \underline{j}_n(A_2).$$

Kanıt. $F_0 \supset A_1$ figürü A_1 ve A_2 'yi birbirinden ayırsın. $F \supset A_1 \cup A_2$ figürü keyfi verilsin. $F_1 := F \cap F_0 \supset A_1$ ve $F_2 := \overline{F \setminus F_1} \supset A_2$. Dolayısıyla $v_n(F) = v_n(F_1) + v_n(F_2)$. Buradan, $F \supset A_1 \cup A_2$ keyfi olduğundan

$$\bar{j}_n(A_1 \cup A_2) \geq \bar{j}_n(A_1) + \bar{j}_n(A_2)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin $\leq$ yönü (2.13)'ten çıkar. Savın ilk yarısı kanıtlanmıştır, diğer yarısı benzer biçimde kanıtlanır. ■

Not. Ne $\bar{j}_n$ ne de $\underline{j}_n$ toplamsal değildir; gerçekten de Q herhangi bir bozulmamış kutu ve $A_1 := Q \cap \mathbb{Q}^n$ ve $A_2 := Q \setminus A_1$ olsun. A_1 veya A_2 'yi içeren her figür Q kutusunu da içereceğinden $\bar{j}_n(A_1) = \bar{j}_n(A_2) = v_n(Q)$ olur. $Q = A_1 \sqcup A_2$ ancak $\bar{j}_n(A_1) + \bar{j}_n(A_2) = 2v_n(Q) \neq v_n(Q) = \bar{j}_n(A_1 \sqcup A_2)$! Diğer yandan her $F_i \subset A_i$ figürü sonlu noktadan oluşacağından $v_n(F_i) = 0$, dolayısıyla $\underline{j}_n(A_1) = \underline{j}_n(A_2) = 0$ ve sonuçta $\underline{j}_n(A_1) + \underline{j}_n(A_2) = 0 \neq v_n(Q) = v_n(A_1 \sqcup A_2)$. Burada A_1, A_2 kümeleri hiç bir figürle ayıramazlar! ▲

Teorem 2.2.4 $Q \in \mathcal{Q}^n$ herhangi bir kutu ve $A \subset Q$ ise

$$\underline{j}_n(A) = v_n(Q) - \bar{j}_n(Q \setminus A). \quad (2.16)$$

Kanıt. $F \subset A$ figürü keyfi verilsin. Bu durumda $Q \setminus F$ de bir figürdür ve F ve $Q \setminus F$ girişimsizdir; dolayısıyla bunları F ayırır. Bu nedenle Önerme 2.2.3 ile

$$\begin{aligned} v_n(Q) - v_n(F) &= v_n(Q \setminus F) = \bar{j}_n(Q \setminus F) \geq \bar{j}_n(Q \setminus A) \\ \implies v_n(F) &\leq v_n(Q) - \bar{j}_n(Q \setminus A). \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\underline{j}_n(A) = \sup_{F \subset A, F \in \mathcal{F}^n} v_n(F) \leq v_n(Q) - \bar{j}_n(Q \setminus A). \quad (2.17)$$

Bu kez F' figürü $A \subset F' \subset Q$ olacak biçimde keyfi verilsin. Yine Önerme 2.2.3 ile

$$\underline{j}_n(A) \geq v_n(Q) - \bar{j}_n(Q \setminus A) \quad (2.18)$$

elde edilir. (2.17) ve (2.18) birlikte savı verir. ■

Lemma 2.2.5 $A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı olsun. A 'nın Jordan ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşulun her $\varepsilon > 0$ için $A_\varepsilon, A^\varepsilon \in \mathcal{F}^n$ figürlerinin

$$A_\varepsilon \subset A \subset A^\varepsilon \text{ ve } v_n(A^\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$$

olacak biçimde bulunmasıdır.

Kanıt. v_n monoton olduğundan her $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^n$ için $F_1 \subset A \subset F_2$ ise $v_n(F_1) \leq v_n(F_2)$ olur. Bu eşitsizlikte önce F_1 üzerinden supremum, ardından F_2 üzerinden infimum alırsak

$$F_1 \subset A \subset F_2 \implies v_n(F_1) \leq \underline{j}_n(A) \leq \bar{j}_n(A) \leq v_n(F_2) \quad (2.19)$$

olur.

(1) Şimdi $\underline{j}_n(A) = \bar{j}_n(A) = j_n(A)$ olsun ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $A_\varepsilon, A^\varepsilon$ figürlerini $A_\varepsilon \subset A \subset A^\varepsilon$, $j_n(A) - \frac{\varepsilon}{2} < v_n(A_\varepsilon)$ ve $v_n(A^\varepsilon) < j_n(A) + \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde seçebiliriz. Hacimlerimiz sonlu ve hacim toplamsal olduğundan $v_n(A^\varepsilon) = v_n(A_\varepsilon) + v_n(A^\varepsilon \setminus A_\varepsilon)$ eşitliğinden

$$v_n(A^\varepsilon \setminus A_\varepsilon) = v_n(A^\varepsilon) - v_n(A_\varepsilon) < j_n(A) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(j_n(A) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

(2) Koşul sağlansın. Her $\varepsilon > 0$ için, (2.19) ile

$$\bar{j}_n(A) - \underline{j}_n(A) \leq v_n(A^\varepsilon) - v_n(A_\varepsilon) = v_n(A^\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$$

olduğundan $\bar{j}_n(A) = \underline{j}_n(A)$ olur. ■

Teorem 2.2.6 (Jordan hacmi) $\mathcal{J}^n, \mathbb{R}^n$ 'de $\mathcal{F}^n$ 'i içeren bir halkadır. $j_n : \mathcal{J}^n \rightarrow [0, +\infty)$ bir hacimdir ve $j_n|_{\mathcal{F}^n} = v_n$.

Kanıt. (1) Önce $\mathcal{J}^n$ 'nin bir halka olduğunu görelim. $\emptyset \in \mathcal{J}^n$ ve $j_n(\emptyset) = 0$ olduğu aşikar. Geriye $A, B \in \mathcal{J}^n$ ise $A \setminus B, A \cup B \in \mathcal{J}^n$ olduğunu görmek kalıyor. Önsav 2.2.5 ile $A_\varepsilon, A^\varepsilon, B_\varepsilon, B^\varepsilon$ figürlerini $A_\varepsilon \subset A \subset A^\varepsilon, B_\varepsilon \subset B \subset B^\varepsilon$ ve

$$v_n(A^\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad v_n(B^\varepsilon \setminus B_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.20)$$

olacak biçimde seçelim. Aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$A_\varepsilon \setminus B^\varepsilon \subset A \setminus B \subset A^\varepsilon \setminus B_\varepsilon \quad \text{ve} \quad A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \subset A \cup B \subset A^\varepsilon \cup B^\varepsilon. \quad (2.21)$$

Farklı durum irdelemeleriyle aşağıdaki bağıntılar görülür:

$$(A^\varepsilon \setminus B_\varepsilon) \setminus (A_\varepsilon \setminus B^\varepsilon) \subset (A^\varepsilon \setminus A_\varepsilon) \cup (B^\varepsilon \setminus B_\varepsilon) \quad (2.22)$$

$$(A^\varepsilon \cup B^\varepsilon) \setminus (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \subset (A^\varepsilon \setminus A_\varepsilon) \cup (B^\varepsilon \setminus B_\varepsilon). \quad (2.23)$$

(2.22) ve (2.6) alttoplamsallığı ve (2.20) ile

$$v_n[(A^\varepsilon \setminus B_\varepsilon) \setminus (A_\varepsilon \setminus B^\varepsilon)] \leq v_n(A^\varepsilon \setminus A_\varepsilon) + v_n(B^\varepsilon \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$$

olur. Bu, (2.21) ve Önsav 2.1.7 ile birlikte $A \setminus B \in \mathcal{J}^n$ olduğunu söyler. Benzer biçimde (2.23)'ten yola çıkarak $A \cup B \in \mathcal{J}^n$ olduğu görülür.

Şimdi $A, B \in \mathcal{J}^n$ ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. $A_\varepsilon \subset A \subset A^\varepsilon$, $B_\varepsilon \subset B \subset B^\varepsilon$ koşulunu sağlayan figürlerimiz için $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ ayrık ve $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \in \mathcal{J}^n$ olduğundan

$$\begin{aligned} v_n(A_\varepsilon) + v_n(B_\varepsilon) &= v_n(A_\varepsilon \sqcup B_\varepsilon) \leq \underline{j}_n(A_\varepsilon \sqcup B_\varepsilon) = \bar{j}_n(A_\varepsilon \sqcup B_\varepsilon) \\ &\leq v_n(A^\varepsilon \cup B^\varepsilon) \leq v_n(A^\varepsilon) + v_n(B^\varepsilon). \end{aligned}$$

Burada A_ε ve B_ε üzerinden supremum, $A^\varepsilon, B^\varepsilon$ üzerinden infimum alırsak

$$j_n(A \sqcup B) = j_n(A) + j_n(B)$$

ve bu j_n 'nin toplamsallığını verir. Son olarak (2.19)'da $A_\varepsilon = A^\varepsilon =: F = E$ alırsak her $F \in \mathcal{F}^n$ için $v_n(F) = \underline{j}_n(F) = \bar{j}_n(F)$, dolayısıyla $F \in \mathcal{J}^n$ ve $j_n(F) = v_n(F)$ olur. ■

Böylece Öklid geometrisinde figürler için açıklanan v_n hacmini $\mathcal{J}^n$ 'de açıklanan Jordan hacmine genişlettik.

$\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ 'deki

$$K \langle a; \varepsilon \rangle := \langle a_1, a_1 + \varepsilon \rangle \times \cdots \times \langle a_n, a_n + \varepsilon \rangle$$

kutusunda a **köşeli** ε -**küpü** diyelim. Bu küpün çapı $d(K \langle a; \varepsilon \rangle) = \varepsilon \sqrt{n}$ 'dir.

Tanım 2.2.7 $k \in \mathbb{N}$ ve $A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}_k \rangle &:= \{K \langle 2^{-k}a; 2^{-k} \rangle \mid a \in \mathbb{Z}^n\} \\ A_{[k]} &:= \bigcup \{Q \mid Q \in [\mathcal{K}_k] \text{ ve } Q \subset A\} \text{ ve} \\ A^{[k]} &:= \bigcup \{Q \mid Q \in [\mathcal{K}_k] \text{ ve } Q \cap A \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

$A_{[k]}$ ve $A^{[k]}$ 'ye A 'nın **kapalı küpselyaklaşımları** diyelim.

Sayılabilir çoklukta kompakt ve girişimsiz kutuların birleşimi olarak $A_{[k]}$ ve $A^{[k]}$ kapalı kümelerdir. Eğer A sınırlı ise $A_{[k]}, A^{[k]} \in \mathcal{F}^n$ olduğu apaçıktır; bu durumda $A_{[k]}, A^{[k]}$ kümeleri kompakt figürlerdir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $[\mathcal{K}_k]$ sağdan yarıaçık ve $(\mathcal{K}_k)$ soldan yarıaçık küp aileleri $\mathbb{R}^n$ 'nin sayılabilir parçalanışları iken $[\mathcal{K}_k]$ ise $\mathbb{R}^n$ 'nin bir sayılabilir girişimsiz parçalanışdır. Bu tanımları şöyle de dillendirebiliriz. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $x_i = k$, $1 \leq i \leq n$ hiperdüzlemleri ile köşeleri $\mathbb{Z}^n$ 'de olup kenar uzunlukları $2^{-0} = 1$ olan $[\mathcal{K}_0]$, $(\mathcal{K}_0)$ ve $[\mathcal{K}_0]$ ailelerine ulaşırız. Bu küplerin kenarlarının orta noktalarından geçen hiperdüzlemleri çizerek, bu kez köşeleri $2^{-1}\mathbb{Z}^n$ 'de ve kenar uzunlukları 2^{-1} olan $[\mathcal{K}_1]$, $(\mathcal{K}_1)$ ve $[\mathcal{K}_1]$ ailelerine ulaşırız. Böyle devam ederek her bir $[\mathcal{K}_k]$, $(\mathcal{K}_k)$ ve $[\mathcal{K}_k]$ ailelerine ulaşırız.

Tanım gereği her $k \in \mathbb{N}$ için

$$A_{[k]} \subset A_{[k+1]} \subset A \subset A^{[k+1]} \subset A^{[k]} \quad (2.24)$$

ve A Jordan ölçülebilirse $v_n(A_{[k]}) \leq j_n(A) \leq v_n(A^{[k]})$ olduğu apaçıktır.

Lemma 2.2.8 Her $A \subset \mathbb{R}^n$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için:

- (i) $\{x \in \mathbb{R}^n | d(x, A^c) > 2^{-k}\sqrt{n}\} \subset A_{[k]} \subset A^{[k]} \subset \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, A) \leq 2^{-k}\sqrt{n}\}$.
- (ii) $\overset{\circ}{A} \subset \bigcup_{k \geq 1} A_{[k]} \subset A$ ve $\bar{A} \supset \bigcap_{k \geq 1} A^{[k]} \supset A$.

Kanıt. (i) (a): $x \in \mathbb{R}^n$ ve $k \in \mathbb{N}$ keyfi verilsinler. Bu durumda bir $Q \in [\mathcal{K}_{[k]}]$ ile $x \in Q$ olur. $d(Q) = 2^{-k}\sqrt{n}$ olduğundan aşağıdaki çıkarımlar geçerlidir:

$$d(x, A^c) > 2^{-k}\sqrt{n} \implies Q \subset A \implies x \in A_{[k]}.$$

(i) (b): Şimdi $x \in A^{[k]}$ olsun. Bu durumda bir $Q \in [\mathcal{K}_{[k]}]$ ile $x \in Q$ ve $Q \cap A \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla

$$x \in A^{[k]} \implies d(x, A) \leq 2^{-k}\sqrt{n}.$$

Böylece (i) kanıtlanmıştır ve (ii) doğrudan (i)'den çıkar. ■

Lemma 2.2.9 $M, K \subset \mathbb{R}^n$, $K \subset \mathbb{R}^n$ dışbükey ve $K \cap M \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda ya $K \subset M$ ya da $K \cap \partial M \neq \emptyset$.

Kanıt. Koşullarımız sağlansın ve $K \not\subset M$ olsun. Bu durumda $a, b \in K$ noktaları $a \in M$ ve $b \notin M$ olacak biçimde bulunabilir. K dışbükey olduğundan $[a, b] \subset K$. Diğer yandan $[a, b] \cap \partial M \neq \emptyset^4$. Bu, savı verir. ■

Bir $A \subset \mathbb{R}^n$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$U_\varepsilon(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) < \varepsilon\} \text{ olsun.}$$

Önerme 2.2.10 $A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) $\underline{j}_n(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_n(A_{[k]})$ ve $\bar{j}_n(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_n(A^{[k]})$.
- (ii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{j}_n(U_\varepsilon(A)) = \bar{j}_n(A)$.
- (iii) $\underline{j}_n(A) + \bar{j}_n(\partial A) = \bar{j}_n(A)$.
- (iv) $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı olmak üzere $\bar{j}_n(A \cup B) \leq \bar{j}_n(A) + \bar{j}_n(B)$.

Kanıt. (i) Savı iç hacim için kanıtlayacağız. (2.24)'ten $(v_n(A_{[k]}))$ 'nin monoton artan ve $\lim v_n(A_{[k]}) \leq \underline{j}_n(A)$ olduğu açıktır. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Girişimsiz kapalı kutuların birleşimi olan bir $F \in \mathcal{F}^n$ figürünü $\underline{j}_n(A) - v_n(F) < \varepsilon/2$ olacak biçimde seçelim. $K := \bigcup_{m=0}^{+\infty} 2^{-m}\mathbb{Z}^n$ köşeler kümesi $\mathbb{R}^n$ 'de yoğundur. Bu nedenle F 'de geçen kutuları, köşelerini kendilerine yeterince yakın K 'deki köşelerle değiştirip az biraz küçülterek, bir F' figürünü $\underline{j}_n(A) - v_n(F') < \varepsilon$ olacak biçimde elde edebiliriz. F' 'nin $2^{-m}p$ ($p \in \mathbb{Z}^n$) köşelerinde geçen en büyük m sayısı m_0 ise $F' \subset A_{[m_0]}$ olur. Dolayısıyla

⁴ $U \subset \mathbb{R}^n$ açık, $a \in U$ ve $b \notin U$ ise $[a, b] \cap \partial U \neq \emptyset$.

$j_n(A) - v_n(A_{[m_0]}) < \varepsilon$. Bu ve ilk eşitsizlikten $j_n(A) = \lim_{m \rightarrow +\infty} v_n(A_{[k]})$ olur. Sav, dış hacim için benzer biçimde kanıtlanır.

(ii) $U_\varepsilon(Q \langle a, b \rangle) \subset [a_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon] \times \cdots \times [a_n - \varepsilon, b_n + \varepsilon]$ olduğundan savımız kutularımız, dolayısıyla figürlerimiz için doğrudur. $\bar{j}_n(A) < \alpha$ ise bir F figürü $A \subset F$ ve $v_n(F) < \alpha$ olacak biçimde vardır. Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ 'lar için $\bar{j}_n(U_\varepsilon(F)) < \alpha$, dolayısıyla $U_\varepsilon(A) \subset U_\varepsilon(F)$ olduğundan $\bar{j}_n(U_\varepsilon(A)) < \alpha$ olur. Bu savı verir.

(iii) Önsav 2.2.9'dan dolayı $A_{[k]} \sqcup (\partial A)^{[k]} = A^{[k]}$. Sav (i) ile bundan çıkar.

(iv) $(A \cup B)^{[k]} = A^{[k]} \cup B^{[k]}$ olduğundan $v_n((A \cup B)^{[k]}) \leq v_n(A^{[k]}) + v_n(B^{[k]})$; buradan $k \rightarrow +\infty$ ile sav çıkar. ■

Tanım 2.2.11 Bir $S \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı kümesine $S \in \mathcal{J}^n$ ve $j_n(S) = 0$ ise *sıfır hacimlidir* diyelim.

Not 2.2.12 Daima $0 \leq j_n(S) \leq \bar{j}_n(S)$ olduğundan S 'nin sıfır hacimli olması $\bar{j}_n(S) = 0$ olmasına denktir. Bu ise her $\varepsilon > 0$ için bir F_ε figürünün $S \subset F_\varepsilon$ ve $v_n(F_\varepsilon) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmesine denktir. Diğer yandan sıfır hacimli kümelerin altkümeleri de sıfır hacimlidir. Eğer A sınırlı kümesi bir hiperdüzleme düşmüşse bir bozuk n -kutusunun altkimesi olarak sıfır hacimlidir. Sonlu sayıda sıfır hacimli kümenin birleşiminin de sıfır hacimli olduğu apaçıktır. Gerçekten de, $S_1, \dots, S_m \subset \mathbb{R}^n$ sıfır hacimli kümeler ve $S := \bigcup_{i=1}^m S_i$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $F_i \in \mathcal{F}^n$ figürlerini $S_i \subset F_i$ ve $v_n(F_i) < \varepsilon/m$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda $F := \bigcup F_i \in \mathcal{F}^n$, $S \subset F$ ve $v_n(F) \leq \sum_{i=1}^m v_n(F_i) < m \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$. Dolayısıyla S sıfır hacimlidir. Her $a \in \mathbb{R}^n$ için $\{a\}$ bozuk kutusu sıfır hacimlidir. Dolayısıyla her sonlu $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi sıfır hacimlidir. $(a_k) \subset \mathbb{R}^n$ dizisi yakınsak ve $\lim a_k = a$ ise $\{a_k | k \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ kümesinin sıfır hacimli olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Ancak burada Örnek 2.2.15(1)'e bakmanızı öneririz. ▲

Sonuç 2.2.13 (Jordan ölçülebilirlik ölçütü) Sınırlı bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Jordan ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul ∂A 'nın sıfır hacimli olmasıdır.

Kanıt. Doğrudan 2.2.10 (iii)'ten çıkar. ■

Sonuç 2.2.14 $A \in \mathcal{J}^n$ olsun.

- (i) $\mathring{A} \subset B \subset \bar{A}$ ise $\mathring{A}, B, \bar{A} \in \mathcal{J}^n$ ve $j_n(\mathring{A}) = j_n(B) = j_n(\bar{A})$.
- (ii) $A, B \in \mathcal{J}^n \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{J}^n$.
- (iii) $A \in \mathcal{J}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı ve düzgün sürekli bir fonksiyon ise $G_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} | x \in A\}$ grafi $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de bir sıfır kümesidir. Özellikle A kompakt ve f sürekli ise G_f sıfır kümesidir.⁵

⁵Riemann integrallerine geçtiğimizde bu, tam da, Jordan ölçülebilir kompakt kümelerde sürekli fonksiyonların integrallenebilir olması anlamına gelir.

Kanıt. (i) $\partial A = \partial B = \partial \bar{A}$ sıfır kümesi olduğundan $\mathring{A}, B, \bar{A} \in \mathcal{J}^n$.

(ii) $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ kümelerinin herhangi birini C ile gösterirsek $\partial C \subset \partial A \cup \partial B$. Sonuç 2.2.13 ile sav buradan çıkar. Bu, $\mathcal{J}^n$ 'nin halka olduğunu bir kez daha kanıtlar.

(iii) Bir $Q \in \mathcal{Q}^n$ kutusunu $A \subset Q$ olacak biçimde seçelim. Q 'nun herhangi bir $Q_1, \dots, Q_m$ kutularına parçalanışı için $m_i := \inf f(A \cap Q_i)$ ve $M_i := \sup f(A \cap Q_i)$ olsun. Bu durumda $G_f \subset \bigsqcup_{i=1}^m Q_i \times [m_i, M_i]$. Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. f düzgün sürekli olduğundan bu parçalanışı $M_i - m_i < \varepsilon$ olacak biçimde seçebiliriz. Bu durumda

$$j_{n+1}(G_f) \leq \sum_{i=1}^m j_{n+1}(Q_i \times [m_i, M_i]) < \sum_{i=1}^m j_n(Q) \varepsilon = j_n(Q) \varepsilon$$

olur. $\varepsilon \searrow 0$ için limite geçerse $j_{n+1}(G_f) = 0$ olur. ■

Örnek 2.2.15. (1) Jordan ölçülemez kümeler var mı? Q kutusu bozuk olmasın ve $A := Q \cap \mathbb{Q}^n$ olsun. $\mathring{A} = \emptyset$ ve $\partial A = \bar{A} = Q$ olduğundan $\underline{j}_n(A) = 0 < v_n(Q) = \bar{j}_n(A)$. Dolayısıyla A Jordan ölçülemez. Diğer yandan her $a \in \mathbb{R}^n$ için $Q[a, a] = \{a\}$ olduğundan $\{a\}$ Jordan ölçülebilir. A kümesi sayılabilir çoklukta Jordan ölçülebilir kümenin birleşimidir. Bu örnekten şunu öğrendik: Sayılabilir çoklukta Jordan ölçülebilir kümenin birleşiminin Jordan ölçülebilir olması gerekmez.

(2) $\bar{B}_r^1 = [-r, r]$ ve $B_r = (-r, r)$ Jordan ölçülebilir. $n \geq 2$ için 0-merkezli r yarıçaplı B_r^n açık topunun Jordan ölçülebilir olduğu kanıtlanmış olsun. $x \in B_r^n$ için $f(x) := \sqrt{r^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2}$ ve $g = -f$ olsun. f ve g düzgün sürekli olduklarından G_f ve G_g sıfır hacimlidir. $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de B_r^{n+1} topu için $\partial B_r \subset G_f \cup G_g$ sıfır hacimlidir. Dolayısıyla B_r^{n+1} ve $\bar{B}_r^{n+1}$ Jordan ölçülebilir.

(3) Açık kümeler analizde çok önemlidir. Ne var ki Jordan ölçülemeyen açık kümeler vardır ve bu, Jordan ölçüsünün zayıf yanlarından biridir. Sayılabilir $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ kümesini $q_1, q_2, \dots$ olarak sıralayalım.

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}, I_k := (q_k - 2^{-k} \varepsilon, q_k + 2^{-k} \varepsilon) \cap (0, 1) \text{ ve } U := \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$$

olsun. U açık ve $U \subset (0, 1)$. Biz $U \notin \mathcal{J}^1$ olduğunu savunuyoruz. $U_{[m]} \in \mathcal{F}^1$ figürü kompakt olduğundan sonlu sayıda $I_1, \dots, I_m$ ile örtülür ve

$$v_n(U_{[m]}) \leq \sum_{i=1}^m v_n(I_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{1-i} \varepsilon = 2\varepsilon < 1. \quad (2.25)$$

Önerme 2.2.10(1)'den $\underline{j}_n(U) = \lim v_n(U_{[m]}) \leq 2\varepsilon < 1$ elde edilir. Diğer yandan, her $F \supset U$ figürü için $\bar{F} \supset \bar{U} = [0, 1]$ olduğundan, $v_n(F) = v_n(\bar{F}) \geq v_n([0, 1]) = 1$, böylece $\bar{j}_1(U) \geq 1$ olur. Sonuçta $U \notin \mathcal{J}^1$. Diğer yandan $\mathbb{R}$ 'nin her U açık kümesi sayılabilir çoklukta $I_\lambda, \lambda \in \Lambda$ açık aralığının ayrık birleşimidir. Dolayısıyla U 'nun $v_1(U)$ uzunluğunu $\sum_{\lambda \in \Lambda} v_1(I_\lambda)$ olarak açıklamaktan daha doğal bir şey olamaz! Sanırım buna ilk dikkat çeken Fréchet olmuştur. Ancak bu kez ölçülerin sayılabilir toplamsallığına ve $+\infty$ olmasına izin vermek zorundayız. Bunu Kısım 3.2'de ele alacağız.

$I = (0, 1)$ 'de yoğun olan $A = \{q_k | k \in \mathbb{N}^*\}$ kümesinin her bir q_k noktası için bir $I_k \subset I$ açık aralığı seçtik. I_k 'ların ayrık olması gerekmez. Bu durumda sağduyu ve geometrik sezgiler bize I_k aralıklarının uzunluklarının toplamının kesinlikle ≥ 1 olması gerektiğini söyler. (2.25) ise bize bu toplamın istenildiği kadar küçük seçilebileceğini kanıtlar. Ders: *Sezgi, sağduyu ve geometrik şekiller yol gösterici olabilirler, ancak asla kanıt olarak kullanılamazlar!*

Sonuç 2.2.16 (Yaklaşım) $A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı olsun.

- (i) Eğer Jordan ölçülebilir kümelerden oluşan bir (B_k) dizisi, $B_k \subset A$ ve $\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{j}_n(A \setminus B_k) = 0$ olacak biçimde bulunabiliyorsa A da Jordan ölçülebilir ve $j_n(A) = \lim j_n(B_k)$.
- (ii) Eğer Jordan ölçülebilir kümelerden oluşan $(B_k), (C_k)$ dizileri $B_k \subset A \subset C_k$ ve $\lim j_n(C_k \setminus B_k) = 0$ olacak biçimde bulunabiliyorsa A Jordan ölçülebilir ve $j_n(A) = \lim j_n(B_k)$.

Kanıt. (i) Herşeyden önce M, N sınırlı kümeleri için $\bar{j}_n(M \cup N) \leq \bar{j}_n(M) + \bar{j}_n(N)$ olduğu apaçıktır. Dolayısıyla

$$j_n(B_k) \leq \underline{j}_n(A) \leq \bar{j}_n(A) \leq \bar{j}_n(A \setminus B_k) + \bar{j}_n(B_k) = \bar{j}_n(A \setminus B_k) + j_n(B_k).$$

Koşulumuzdan $\underline{j}_n(A) = \bar{j}_n(A)$ olur ve işimiz biter.

- (ii) $\bar{j}_n(A \setminus B_k) \leq \bar{j}_n(C_k \setminus B_k) = j_n(C_k \setminus B_k)$ olduğundan, sav (i)'den çıkar. ■

Teorem 2.2.17 (Çarpım Kuralı) $p, q, n \in \mathbb{N}^*, n = p + q$ olmak üzere $A \in \mathcal{J}^p, B \in \mathcal{J}^q$ ise $A \times B \in \mathcal{J}^n$ ve $j_n(A \times B) = j_p(A) \cdot j_q(B)$.

Kanıt. Her şeyden önce $P \in \mathcal{Q}^p$ ve $Q \in \mathcal{Q}^q$ kutularsa $P \times Q \in \mathcal{Q}^n$ de bir kutudur ve $v_n(P \times Q) = v_p(P)v_q(Q)$. Şimdi $F \in \mathcal{F}^p$ ve $G \in \mathcal{F}^q$ figürleri verilsin. F figürü ayrık $P_1, \dots, P_m \in \mathcal{Q}^p$ ve G figürü ayrık $Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{Q}^q$ kutularının birleşimi olarak yazılabilir. $F \times G$ de ayrık $P_i \times Q_j$ kutularından oluşan bir figürdür ve

$$v_n(F \times G) = \sum_{i,j} v_n(P_i \times Q_j) = \sum_{i,j} v_p(P_i)v_q(Q_j) = v_p(F)v_q(G).$$

Buradan $A_{[k]} \times B_{[k]} \subset A \times B \subset A^{[k]} \times B^{[k]}$ olduğundan

$$\begin{aligned} v_p(A_{[k]})v_q(B_{[k]}) &= v_n(A_{[k]} \times B_{[k]}) \\ &\leq \underline{j}_n(A \times B) \leq \bar{j}_n(A \times B) \\ &\leq v_n(A^{[k]} \times B^{[k]}) = v_p(A^{[k]})v_q(B^{[k]}) \end{aligned}$$

olur. Önerme 2.2.10 (i)'den, $k \rightarrow +\infty$ için ilk ve son terim $j_p(A)j_q(B)$ 'ye yakınsar ve bu, savı verir. ■

$A \subset \mathbb{R}^n$ ve $[m, M]$ bir kapalı aralık olmak üzere $S := A \times [m, M]$ kümesine $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de A tabanlı bir **silindir** diyelim. Eğer A Jordan ölçülebilirse S de Jordan ölçülebilir ve $j_{n+1}(S) = j_n(A)(M - m)$. Dolayısıyla Jordan ölçülebilir S silindirinin Jordan hacmi, tabanın hacmi çarpı yüksekliktir.

Not 2.2.18 $I \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir olsun. Hangi $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonları Jordan ölçülebilir kümeleri Jordan ölçülebilir kümelere resmeder? $n = 2$, $I = [0, 1]$ ve $Q = I \times I$ olmak üzere $p : I \rightarrow Q$ Peano dönüşümü olsun. Bizi p 'nin şu özellikleri ilgilendirir: p sürekli ve $p(I) = Q$. Şimdi $I \times \{0\} \subset Q$, $\mathbb{R}^2$ 'de sıfır hacimlidir. $f(x, 0) := p(x)$ dersek $f : I \rightarrow Q$ sürekli. Her $B \subset Q$ için $A = f^{-1}(B)$ ise A bir sıfır hacimli kümenin alt kümesi olarak sıfır hacimlidir. Öyleyse her $B \subset Q$ kümesi sürekli f dönüşümü altında bir sıfır hacimli kümenin resmidir. Sonuçta bir dönüşümün, ölçülebilir kümeleri ölçülebilir kümelere resmedebilmesi için *sürekliikten daha güçlü* özelliklerinin olması gerekir. ▲

Lemma 2.2.19 $A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ise L sabitli bir Lipschitz fonksiyonu ise

$$\bar{j}_n(f(A)) \leq \alpha \bar{j}_n(A), \quad \alpha := (L\sqrt{n})^n.$$

Özellikle, A sıfır hacimli ise $f(A)$ de sıfır hacimlidir.

Kanıt. Orta noktası $a \in A$ ve kenar uzunluğu 2λ olan bir K kübü için

$$\forall x \in A \cap K \quad (|f(x) - f(a)| \leq L\lambda\sqrt{n})$$

olur. Dolayısıyla $f(A \cap K)$ kümesi, orta noktası $f(a)$, kenarları eksenlere paralel, kenar uzunluğu $L2\lambda\sqrt{n}$ ve hacmi $(L\sqrt{n})^n v_n(K) = \alpha v_n(K)$ olan bir K^* kübüne düşer. $A \subset A^{[k]} = \bigcup_{i=1}^m K_i$ ise $f(A) \subset \bigcup_{i=1}^m K_i^*$ ve $\alpha = (L\sqrt{n})^n$ olmak üzere

$$\bar{j}_n(f(A)) \leq v_n \left(\bigcup_{i=1}^m K_i^* \right) \leq \sum_{i=1}^m v_n(K_i^*) = \alpha \sum_{i=1}^m v_n(K_i) = \alpha v_n(A^{[k]})$$

olur. Sav buradan $k \rightarrow +\infty$ ile elde edilir (bkz. Önerme 2.2.10 (i)). ■

Teorem 2.2.20 $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir bir açık küme olsun. $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz sürekli, $f|_A \in C^1$ ve her $x \in A$ için $\det f'(x) \neq 0$ olsun. Bu koşullarda $f(A)$ kümesi açık, Jordan ölçülebilir ve

$$\overline{f(A)} = f(\bar{A}) \quad \text{ve} \quad \partial f(A) \subset f(\partial A).$$

f birebirse $\partial f(A) = f(\partial A)$. Ayrıca her Jordan ölçülebilir $C \subset \bar{A}$ için $f(C)$ de Jordan ölçülebilir.

Kanıt. (i) $B := f(A)$ olsun. Açık Dönüşüm Teoremi'nden⁶ dolayı B açıktır. $\overline{A}$ kompakt olduğundan $f(\overline{A})$ kompakt, dolayısıyla kapalıdır. Böylece $\overline{B} \subset f(\overline{A})$, dolayısıyla

$$\partial B = \overline{B} \setminus B \subset f(\overline{A}) \setminus f(A) \subset f(\partial A). \quad (2.26)$$

A Jordan ölçülebilir olduğundan ∂A sıfır hacimlidir; bu ve Önsav 2.2.19'dan ∂B sıfır hacimlidir. Sonuçta B Jordan ölçülebilir.

(ii) Her $a \in \partial A$ için $\lim a_k = a$ olacak biçimde $(a_k) \subset A$ dizileri vardır. $b_k = f(a_k)$ ve $b = f(a)$ dersek $b = \lim f(b_k) \in \overline{B}$ olur. Dolayısıyla $f(\overline{A}) \subset \overline{B}$ olur. Yukarıda $\overline{B} \subset f(\overline{A})$ gösterilmişti. Sonuçta $\overline{B} = f(\overline{A})$ olur.

(iii) Şimdi f birebir olsun ve a_k, b_k ve b yukarıdaki gibi olsunlar. $b \in \partial B$ olduğunu savunuyoruz. $b \in B$ varsayalım. O zaman bir $a' \in A$ ile $f(a') = b$ olur. Bu durumda a' 'nin bir açık U komşuluğu ile b 'nin bir açık V komşuluğu $f(U) = V$ olacak biçimde vardır. $\lim a_k = a \in \partial A$ olduğundan, gerekirse U 'yu daraltarak, bir k_0 ile her $k \geq k_0$ için $a_k \notin U$ sağlanır. Dolayısıyla her $k \geq k_0$ için $b_k \notin V$ olur ve bu $\lim b_k = b$ ile çelişir. Böylece (i) ile birlikte $f(\partial A) = \partial f(A)$ olur.

(iv) $C \subset \overline{A}$ Jordan ölçülebilir olsun. $C = \overset{\circ}{C} \sqcup (C \setminus \overset{\circ}{C})$ ve $C \setminus \overset{\circ}{C} \subset \partial C$ olduğundan $C \setminus \overset{\circ}{C}$ sıfır hacimlidir. Önsav 2.2.19'dan $f(C \setminus \overset{\circ}{C})$ sıfır hacimlidir, öyleyse Jordan ölçülebilir. (i)'den $f(\overset{\circ}{C})$ da Jordan ölçülebilir. Sonuçta $f(C) = f(\overset{\circ}{C}) \cup f(C \setminus \overset{\circ}{C})$ Jordan ölçülebilir. ■

Aşağıdaki önsavdan dolayı Teorem 2.2.20'nin koşulları gevşetilebilir.

Lemma 2.2.21 $A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı açık küme olsun. Her Lipschitz sürekli $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu tek biçimde bir Lipschitz sürekli $\overline{f} : \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna genişletilebilir.

Kanıt. $a \in \overline{A}$ olsun. a noktasına yakınsayan her $(x_m) \subset A$ dizisi için

$$\|f(x_k) - f(x_m)\| \leq L \|x_k - x_m\|$$

oldüğundan $(f(x_m))$ bir Cauchy dizisidir ve bir b noktasına yakınsar. Öte yandan $(x'_m) \subset A$ dizisi a noktasına yakınsayan bir başka dizi ise $\|f(x_m) - f(x'_m)\| \leq L \|x_m - x'_m\|$ olduğundan $f(x'_m)$ dizisi de b 'ye yakınsar. Dolayısıyla $\overline{f}(a) := b$ tanımı kusursuzdur ve $a \in A$ için $\overline{f}(a) = f(a)$ olduğu apaçıktır.

Şimdi $(x_m), (x'_m) \subset A$ dizileri sırasıyla $a, a' \in \overline{A}$ noktalarına yakınsaksa

$$\begin{aligned} \|\overline{f}(a) - \overline{f}(a')\| &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \|f(x_m) - f(x'_m)\| \\ &\leq L \lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_m - x'_m\| = L \|x_m - x'_m\|. \end{aligned}$$

⁶ Açık Dönüşüm Teoremi: $A \subset \mathbb{R}^n$ açık, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ ve her $x \in A$ için $\det \frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ ise f fonksiyonu açık kümeleri açık kümelere resmeder.

Dolayısıyla $\bar{f}$ Lipschitz süreklidir. ■

Not 2.2.22 Antik çağda geometriciler, bir tablete bir üçgen çizdiğinde, tableti nereye taşırlarsa taşısınlar ve tableti nasıl yerleştirirlerse yerleştirsinler, yeni konumdaki üçgenle ilk konumdaki üçgenin alanının aynı olduğunu tartışmasız, apaçık doğrular olarak kabullendiler. Onlar daha baştan kavramlarını izometrik oluşturdular. Onların döneminde koordinat sistemleri yoktu; dolayısıyla kenar uzunlukları a, b olan bir dikdörtgenin alanı, nerede ve nasıl bulunuyorsa bulunsun, daima ab 'dir. Biz ise, örneğin düzlemde bir kartezyen koordinat sistemi seçip, kenarları eksenlere koşut olan dikdörtgenlerden yola çıktık. Dolayısıyla, kenar uzunlukları a, b olup kenarları eksenlere koşut olmayan bir dikdörtgenin alanının da ab olduğunu kanıtlamak durumundayız. ▲

Lemma 2.2.23 *Her terslenebilir $A \in GL(n, \mathbb{R})$ matrisi için ortogonal O_1, O_2 matrisleri ve bir $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ matrisi, $\lambda_i > 0$ ve $A = O_2 D O_1$ olacak biçimde bulunabilir.⁷ O zaman $|\det A| = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ olur.*

Kanıt. $A^T A$ matrisi simetriktir; ayrıca, her $x \neq 0$ için $x^T A^T A x = \|Ax\|^2 > 0$ olduğundan, pozitif tanımlıdır. Doğrusal cebirden Ana Eksen Dönüşümü teoremi

$$O^T A^T A O =: D_1 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n), \quad \mu_1 > 0, \dots, \mu_n > 0$$

olacak biçimde bir ortogonal O matrisinin var olduğunu söyler. $\lambda_i := \sqrt{\mu_i}$ ve $D := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alırsak, $D^2 = D_1$ ve $D^{-1} = \text{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n)$ olur. Böylece

$$I = D^{-1} D_1 D^{-1} = D^{-1} O^T A^T A O D^{-1}.$$

$O_2 := A O D^{-1}$ için $O_2^T = D^{-1} O^T A^T$, böylece $O_2^T O_2 = I$, yani O_2 ortogonal ve $A = O_2 D O^T$ olur ve işimiz biter. ■

Teorem 2.2.20 $f(A)$ 'nın Jordan ölçülebilir olduğunu söyler, ancak bu kümenin ölçüsü hakkında bir şey söylemez. Özellikle $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izomorf doğrusal dönüşümleri bu teoremin koşullarını sağlar ve onlar için fazlasını söyleyebiliriz.

Teorem 2.2.24 $L \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ ve $f(x) := Lx + b$, ise her Jordan ölçülebilir $A \subset \mathbb{R}^n$ için $f(A)$ de Jordan ölçülebilir ve

$$j_n(f(A)) = |\det L| j_n(A). \quad (2.27)$$

Sonuç 2.2.25 *İzometriler Jordan ölçülebilir kümeleri aynı hacimli Jordan ölçülebilir kümelere resmeder.⁸*

⁷ $GL(n, \mathbb{R})$ terimleri $\mathbb{R}$ 'de olup $\det A \neq 0$ olan $n \times n$ matrislerinin kümesi gösterilir.

⁸ $M^{n \times n}(\mathbb{R})$ terimleri $\mathbb{R}$ 'de olan $n \times n$ matrislerinin kümesidir.

Kanıt. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $X \subset \mathbb{R}^n$ için $X^* := f(X)$ olsun.

(1) f bir öteleme veya bir yansıma olsun. Her iki durumda da $Q \in \mathcal{Q}^n$ için $v_n(Q^*) = v_n(Q)$ olduğu apaçıktır. Dolayısıyla her $F \in \mathcal{F}^n$ figürü için $F^* \in \mathcal{F}^n$ ve $v_n(F^*) = v_n(F)$. Diğer yandan $A \subset B \subset C \iff A^* \subset B^* \subset C^*$. Dolayısıyla A Jordan ölçülebilirse

$$\begin{aligned} \underline{j}_n(A^*) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} v_n(A_{[k]}^*) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_n(A_{[k]}) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} v_n(A^{[k]}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_n(A^{*[k]}) = \bar{j}_n(A^*). \end{aligned}$$

Böylece A^* da Jordan ölçülebilir ve $v_n(A^*) = v_n(A)$.

(2) $L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ olsun. Her $Q \in \mathcal{Q}^n$ için $v_n(Q^*) = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| =: \mu$ olduğu apaçıktır. Buradan her $A \in \mathcal{J}^n$ için A^* ve $v_n(A^*) = \mu v_n(A)$ olduğu (1)'deki gibi gösterilir.

(3) Şimdi L terslenebilir olsun. f dönüşümü Teorem 2.2.20'nin koşullarını sağlar; dolayısıyla her Q kutusu için Q^* Jordan ölçülebilir. $K_1 = Q[0; 1]$ birim küp olmak üzere $\alpha := j_n(K_1^*)$ olsun. $r > 0$ olmak üzere kenar uzunlukları r olan $K_r := Q[0; r] = rK_1$ küpü için, (2)'den dolayı, $j_n(K_r^*) = \alpha j_n(K_r)$. (1)'den dolayı ise bu eşitlik her ötelenmiş $a + rK_1$ küplerimiz için, dolayısıyla küp birleşimleri olan figürlerimiz için de geçerlidir.

$A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı olmak üzere

$$\alpha v_n(A_{[k]}) = v_n(A_{[k]}^*) \leq v_n(A^{[k]*}) \leq \alpha v_n(A^{[k]})$$

olur. Buradan $k \rightarrow +\infty$ ile

$$\alpha \underline{j}_n(A) \leq \underline{j}_n(A^*) \leq \bar{j}_n(A^*) \leq \alpha \bar{j}_n(A) \quad (2.28)$$

elde edilir. Buradan, A Jordan ölçülebilirse A^* da Jordan ölçülebilir ve $j_n(A^*) = \alpha j_n(A)$ olur. Geriye $\alpha = |\det L|$ olduğunu görmek kalıyor. (2.28)'deki α , L 'ye bağlıdır ve titiz davranılırsa α_L ile gösterilmelidir.

Ortogonal O_1, O_2 matrislerini ve D diyagonal matrisini $L = O_2 D O_1$ olacak biçimde seçelim (bkz. Önsav 2.2.23). Şimdi $B := B_1(0)$ birim topumuz olsun; B Jordan ölçülebilir (bkz. Örnek 2.2.15 (2)). $\alpha_i := \det O_i$ olsun. $O_i(B) = B$ olduğundan (2.28)'den $\alpha_i = 1$ olur. Az yukarıda (2)'de D 'ye ilişkin α 'nın $|\det D|$ olduğunu gördük. Son iki tümcedeki bilgilerden L 'ye ilişkin α da $|\det D|$ olur. Diğer yandan $|\det L| = |\det(O_2 D O_1)| = |\det O_2 \cdot \det D \cdot \det O_1| = |\det D|$.

(4) Şimdiye kadar kanıtlananlar sonucu da kanıtlar.

(5) $L \notin GL(n, \mathbb{R})$ ise A^* bir H hiperdüzleminde sınırlı bir kümedir. Bir g izometrisiyle H hiperdüzlemini $H_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$ düzlemine

resmedelim. $g(A^*)$ sıfır hacimlidir, dolayısıyla A^* sıfır hacimlidir ve işimiz biter. ■

Teorem 2.2.24'ün sonuçlarından biri şudur: Jordan ölçülebilir kümeler ve ölçüleri seçilen $(0; e_1, \dots, e_n)$ koordinat sisteminden bağımsızdır. $\mathbb{R}^n$ 'nin herhangi bir $v_1, \dots, v_n$ ortonormal bazından ve herhangi bir O' orijininin yola çıkıp, kenarları v_i 'lere koşut kutularla çalışsaydık, değişen bir şey olmazdı!

2.3 Riemann İntegrali

Uzlaşma: Bu kısımda $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ daima *Jordan ölçülebilir* bir küme ve aksi söylenmedikçe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir *sınırlı* fonksiyon olacaktır. Dolayısıyla *hem* Ω , *hem de* f *sınırlıdır*. $m, M \in \mathbb{R}$ sayıları her $x \in \Omega$ için $m \leq f(x) \leq M$ olarak seçilsinler. Bu veriler bu kısımda sabit tutulacaklardır.

Not. Genelde izlenen yol şudur: İlk yarıyılta $\Omega = [a, b] \in \mathcal{Q}^1$ alınır ve sınırlı $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ için Riemann integrali kavramı verilir. İkinci veya üçüncü yarıyılta ise $\Omega = Q \in \mathcal{Q}_k^n$ bir kapalı kutu ve $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı olarak alınır. Her iki durumda da altintegral ve üstintegral tanımlanırken Ω 'nın kapalı kutulara *sonlu girişimsiz parçalanışları* kullanılır. A bir sınırlı küme ise bir $Q \in \mathcal{Q}^n$ kapalı kutusu $A \subset Q$ olacak biçimde seçilir ve $Q \setminus A$ 'da $\equiv 0$ olarak açıklayarak f fonksiyonu Q 'da bir f_Q fonksiyonuna genişletilir. f_Q 'nun Riemann integrallenebilir olması durumunda $\int_Q f_Q$ değeri Q kapalı kutusunun seçiminden bağımsızdır. Bu durumda $\int_A f := \int_Q f_Q$ olarak açıklanır. Biz bu yolu izlemeyeceğiz. İster bir $[a, b]$ kapalı aralığında, ister $2 \leq n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir $Q \in \mathcal{Q}_k^n$ kapalı kutusunda çalışalım, temel kavramlar, temel teoremler ve kanıtları aynıdır. Dolayısıyla biz doğrudan $\mathbb{R}^n$ 'de çalışmaya başlayacağız. Fubini Teoremi üzerinden $\int_Q f$ integralinin $\int_a^b g$ tipinde integrallerle hesaplanabileceğini öğrendikten sonra, bu tipe özgü teoremlere ve onların hesaplama yöntemlerine odaklanacağız. Diğer yandan $\mathbb{R}^n$ 'de çalışırken Q kapalı kutularında çalışmak yerine doğrudan Jordan ölçülebilir Ω kümelelerinde çalışacağız. Riemann ve Lebesgue integralleri arasındaki benzerlikleri ve nerede birbirinden ayırdıklarını olabildiğince vurgulamak istiyoruz. Lebesgue integralinde parçalanışlarla çalışıldığından Riemann integralinde de parçalanışlarla çalışacağız.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $I = [a, b]$ zaman aralığında bir cismin uzayımızda hareketini inceleyelim. $t \in I$ için cismimizin $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)$ hızını bildiğimizi varsayalım. Cismimizin $\mathbf{x}(a)$ konumunu biliyorsak $\mathbf{x}(b)$ nedir ve cismimiz $\mathbf{x}(b)$ 'ye gelene kadar ne kadar yol katetmiştir? En yalın ve bilinen temel durumdan yola çıkılır: Cismimiz t_0 anında $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0)$ 'da bulunuyor ve $[t_0, t_1]$ aralığında hız vektörümüz sabitse, dd bir $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ile $\mathbf{x}'(t) \equiv \mathbf{v}$ ise,

s katedilen yolu göstermek üzere

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_0) + (t_1 - t_0)\mathbf{v} \text{ ve } \|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_0)\| = s = (t_1 - t_0) \|\mathbf{v}\| = (t_1 - t_0)v.$$

Şimdi problemimize dönelim. Yapacağımız iş, $[a, b]$ zaman aralığını, uygun seçilen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ noktalarıyla küçük $I_k := [t_{k-1}, t_k]$, $k = 0, \dots, n-1$ ve $I_n := [t_{n-1}, t_n]$ zaman dilimlerine bölmek, öyle ki $\xi_k \in I_k$ olmak üzere I_k zaman diliminde hızımız sanki sabit ve $= \mathbf{v}(\xi_k)$ olsun. Örneğin $\mathbf{v}(t)$ sürekli ise bu amaca oldukça yaklaşabileceğimizi biliyoruz. Bu durumda $j_1(I_k) := t_k - t_{k-1}$ olmak üzere $\Delta_k \mathbf{x} := \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1}) \approx j_1(I_k)\mathbf{v}(\xi_k)$ ve $\Delta_k s = s(t_k) - s(t_{k-1}) \approx j_1(I_k) \|\mathbf{v}(\xi_k)\|$ ve sonuçta

$$\mathbf{x}(b) \approx \mathbf{x}(a) + \sum_{k=1}^n j_1(I_k)\mathbf{v}(\xi_k) \text{ ve } s(b) \approx \sum_{k=1}^n j_1(I_k) \|\mathbf{v}(\xi_k)\| \quad (2.29)$$

olur. Beklentimiz zaman aralığımızı gittikçe daha küçük aralıklara parçaladığımızda yukarıdaki toplamların bir limite yaklaştığı ve o denklemlerde $\approx$ yerine $=$ yazabileceğimizdir, dd bu limitleri sırasıyla $\int_a^b \mathbf{v}(t)dt$ ve $\int_a^b \|\mathbf{v}(t)\| dt$ ile gösterirsek

$$\mathbf{x}(b) = \mathbf{x}(a) + \int_a^b \mathbf{v}(t)dt \text{ ve } s(b) = \int_a^b \|\mathbf{v}(t)\| dt$$

olduğudur. $\int_a^b \mathbf{v}(t)dt$ bir vektördür ve herhangi bir hacimle uzaktan yakından bir ilişkisi yoktur! Burada $\mathbf{v} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir vektör değerli fonksiyondur.

Elimizde homojen olmayan bir cisminiz olsun ve bu cismin uzayda kapladığı Ω bölgesi Jordan ölçülebilir olsun. Cisminizin $\rho(\mathbf{x})$ yoğunluk dağılımını bildiğimizi varsayalım. Ω bölgemizi yeterince küçük Jordan ölçülebilir $A_1, \dots, A_k$ kümelerine parçalar ve $\mathbf{a}_i \in A_i$ noktalarını seçersek, cisminizin A_i 'deki kısmının ağırlığı, belli koşullarda, yaklaşık olarak $\rho(\mathbf{a}_i)j_3(A_i)$ 'dir. Dolayısıyla cisminizin W ağırlığı için

$$W \approx \sum_{i=1}^k \rho(\mathbf{a}_i)j_3(A_i) \quad (2.30)$$

olur. Beklentimiz, sayıları sonlu olmak üzere parçaları küçültüp sayılarını artırırsak, bu toplamın bir $\int_{\Omega} \rho$ limitine sahip olacağıdır; bu durumda $W = \int_{\Omega} \rho$ olacaktır. Bu örneklerin ortak özelliği şudur: Jordan ölçülebilir bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesinde tanımlı bir *sınırlı* $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu verilmiştir. Ω 'nın ayrık Jordan ölçülebilir $A_1, \dots, A_k$ kümeleriyle her *sonlu parçalanışı* ve bunlardan seçilen $\mathbf{a}_i \in A_i$ noktalarıyla $\sum_{i=1}^k f(\mathbf{a}_i)j_n(A_i)$ toplamı oluşturulur. *Riemann integrali bu türden sonlu toplamların uygun limit kavramlarına göre*

limitleridir. Herhangi bir A_i 'nin tek parçadan oluşan bir kutu olması gerekmez; A_i kümesi birbirinden uzakta sonlu sayıda ayrık ve Jordan ölçülebilir $B_{i1}, \dots, B_{ik}$ parçalarından oluşabilir. Toplamımızın bir limiti olması için gerekli olan, fonksiyonumuzun A_i 'de aldığı değerlerin birbirine yeterince yakın olmasıdır, dd $sl(f, A_i)$ salınımlarının istenildiği kadar küçük seçilebilmesidir. Ancak $j_n(A_i) = 0$ ise salınım istenildiği kadar büyük olabilir; çünkü bu durumda her $a_i, b_i \in A_i$ için $f(a_i)j_n(A_i) = 0 = f(b_i)j_n(A)$ olur. Özetle hacmi sıfır olan A_i parçalarını toplamımızda gözardı edebiliriz.

Genel durumu özetleyelim. $\mathbb{K}$ cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere V bir $\mathbb{K}$ -Banach uzayı, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir ve $f : \Omega \rightarrow V$ sınırlı olsun. Ω 'nın her sonlu sayıda ayrık, Jordan ölçülebilir $A_1, \dots, A_k$ parçalanışları ve bunlardan seçilen $a_i \in A_i$ noktalarıyla $\sum_i j_n(A_i)f(a_i)$ toplamı oluşturulur. Uygun açıklanan bir limit kavramıyla tüm bu sonlu toplamlar bir limite sahipse bu limit $\int_{\Omega} f$ ile gösterilir ve f 'nin Ω 'daki Riemann integrali adını alır. Bu V Banach uzayları içerisinde biri diğerlerinden bir özelliği ile ayrılır: $V = \mathbb{R}$ ise $\mathbb{R}$, analizde sürekli kullandığımız bir $\leq$ doğal sıralamasına sahiptir. Bu bize $\int_{\Omega} f$ integraline bir farklı yaklaşım sunar; bu integrali doğrudan ölçü üzerinden tanımlama fırsatı verir.

Riemann integralin ölçü üzerinden tanımına kısaca değineceğiz. Biz Jordan ölçülebilir kümeler hakkında yeterince bilgilendiğimiz için isimiz oldukça kolay olacaktır. $A \subset \mathbb{R}^n$ ve $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon ise

$$[0, g] := \{(x, y) \mid x \in A, 0 \leq y \leq g(x)\}, \quad (2.31)$$

$$[g, 0] := \{(x, y) \mid x \in A, g(x) \leq y \leq 0\}, \quad (2.32)$$

$$[0, g) := \{(x, y) \mid x \in A, 0 \leq y < g(x)\}, \quad (2.33)$$

$$(0, g] := \{(x, y) \mid x \in A, 0 < y \leq g(x)\} \quad (2.34)$$

olsun. Bunlardan $[0, g)$ kümesine g 'nin **grafaltı** diyeceğiz. Eğer $g, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g \leq f$ ise

$$[g, f] := \{(x, y) \mid x \in A, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

olsun. $(g, f]$ ve $[g, f)$ benzer biçimde tanımlanırlar. G_g kümesine ise g 'nin **grafı** denir. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir ve $f : \Omega \rightarrow [m, M]$ bir sınırlı fonksiyon olsun. $[0, f]$ ve $[f, 0]$ kümelerinin her ikisi de $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de Jordan ölçülebilirse f fonksiyonu Ω 'da **Riemann integrallenebilir** denir ve

$$\int_{\Omega} f := j_{n+1}([0, f]) - j_{n+1}([f, 0]) \quad (2.35)$$

sayısına f 'nin Ω 'daki **Riemann integrali** denir. Bu tanımdan şunu öğrenmiş oluyoruz: $\int_{\Omega} \text{integrali } \mathbb{R}^n \times \{0\}$ hiper düzleminin üstündeki hacimleri

pozitif, altındakileri ise negatif ölçer. $[0, f], [f, 0]$ kümeleri sonlu $\Omega \times [m, M]$ silindrine düştüğünden

$$\left| \int_{\Omega} f \right| \leq j_n(\Omega)(M - m). \quad (2.36)$$

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ için $f^+, f^- : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonları her $x \in \Omega$ için

$$f^+(x) := \max \{f(x), 0\} \quad \text{ve} \quad f^-(x) := \max \{-f(x), 0\}$$

olarak açıklanır. Bu tanımlarla

$$f = f^+ - f^- \quad \text{ve} \quad |f| = f^+ + f^-$$

olur. $f^- \geq 0$ ve $[0, f^-]$ kümesi $[f, 0]$ 'ın $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ hiperdüzlemine göre yansıması olduğundan $[f, 0]$ 'ın Jordan ölçülebilir olması $[0, f^-]$ kümesinin Jordan ölçülebilir olmasına denktir ve ölçülebilir olma durumunda bu kümelerin ölçüleri eşittir, dolayısıyla

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f^+ - \int_{\Omega} f^-.$$

$f : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ sınırlı fonksiyonu Riemann integrallenebilirse $\partial[0, f]$ ve $\partial[f, 0]$ kümeleri ($\mathbb{R}^{n+1}$ 'de) sıfır hacimlidirler. Diğer yandan $G_f \subset \partial[0, f] \cup \partial[f, 0]$. Böylece şu sonuca ulaşırız: *Sınırlı $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Riemann integrallenebilirse G_f grafi $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de sıfır hacimlidir.* Bu önermenin tersi doğru değildir. $\Omega = [0, 1]$ ve $f : \Omega \rightarrow \Omega$ fonksiyonu $x \in \Omega$ rasyonelse $f(x) = 1$, x irrasyonelse $f(x) = 0$ olarak açıklansın; bu fonksiyona Dirichlet fonksiyonu denir. G_f grafi, $\mathbb{R}^2$ 'de sıfır hacimli olan $(\Omega \times \{0\}) \cup (\Omega \times \{1\})$ kümesinin altkümeleri olarak sıfır hacimlidir. Ancak f Riemann integrallenemez! $Q := \Omega \times \Omega$ olmak üzere $[0, f] \subset Q$ kümesi, $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ olmak üzere, sayılabilir çoklukta ayrık $\{r\} \times [0, 1]$ çubuklarının birleşimidir. $j_2([0, f]) = 0 < 1 = \bar{j}_2([0, f])$ olduğundan $[0, f]$ Jordan ölçülemez; dolayısıyla f Riemann integrallenemez! Aynı sonuca şöyle de ulaşabiliriz: $j_2(\partial[0, f]) = j_2(Q) = 1 > 0$ olduğundan $\partial[0, f]$ sıfır hacimli değildir, dolayısıyla $[0, f]$ Jordan ölçülemez ve f Riemann integrallenemez. Riemann integrallenebilir fonksiyonlar var mı? Herşeyden önce f fonksiyonumuz sabitse, $f \equiv a$ ise f integrallenebilir ve $\int_{\Omega} f = a j_{n+1}(\Omega)$. Her $A \subset \Omega$ için $\mathbf{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x \in A$ için 1 ve $x \in \Omega \setminus A$ için 0 değerini alsın. A Jordan ölçülebilir seçilirse $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a \mathbf{1}_A$ fonksiyonu Riemann integrallenebilir ve $\int_{\Omega} a \mathbf{1}_A = a j_{n+1}(A)$. Eğer $A_1, \dots, A_k \subset \Omega$ Jordan ölçülebilir ayrık altkümeler ve $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f = \sum a_i \mathbf{1}_{A_i}$ ise f fonksiyonu Ω 'da Riemann integrallenebilir ve

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \left(\sum a_i \mathbf{1}_{A_i} \right) = \sum_i a_i j_{n+1}(A_i).$$

Özellikle $\int_{\Omega} 1 = j_n(\Omega)$. Bu eşitlik çokça izlenen bir başka yolun çıkış noktasıdır. $\Omega = Q$ bir kapalı kutu alınır; kutuların hacmini biliyoruz. Q 'nın yalnızca (girişimsiz) kutulara parçalanışına izin verilir. Az ileride açıklayacağımız alt-integral, üstintegral ve Darboux integralinde yalnızca bu tür parçalanışlar kullanılır. Herhangi bir A sınırlı kümesi verildiğinde bu bir Q kapalı kutusuna alınır ve $\mathbf{1}_A$ fonksiyonu Q 'da Darboux integrallenebilirse A Jordan ölçülebilir denir ve $j_n(A) = \int_Q \mathbf{1}_A$ olarak açıklanır. Bu yönde daha fazla ilerlemeyeceğiz. $\blacktriangle$

Jordan ölçülebilir ve ayrık $A_1, \dots, A_k$ kümeleri ile $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^k A_i$ ise $\mathcal{Z} = \{A_i | i = 1, \dots, k\}$ ailesi Ω 'nın bir **parçalanışı**dır denir. Bazen bu parçalanışı yalın olarak $\mathcal{Z} = \{A_i\}$ olarak da göstereceğiz. Ω 'nın parçalanışlarının kümesini $\mathfrak{Z}(\Omega)$ ile gösterelim. $\mathcal{Z}' = \{A'_1, \dots, A'_l\}$, Ω 'nın bir diğer parçalanışı olsun. Eğer her bir A_i bir takım A'_j 'lerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa, eş anlamlı olmak üzere her bir A'_j bir A_i 'nin altkümesi ise $\mathcal{Z}'$ parçalanışı $\mathcal{Z}$ parçalanışının bir inceltiimidir denir ve bu $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$ olarak gösterilir. $\mathcal{Z}_1 = \{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ ve $\mathcal{Z}_2 = \{B_j\}_{1 \leq j \leq l}$ 'nin ikisi de $\mathfrak{Z}(\Omega)$ 'da ise

$$\mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 := \{A_i \cap B_j | 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l\}$$

de Ω 'nın bir parçalanışıdır; $i = 1, 2$ için $\mathcal{Z}_i \prec \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2$. Açıkca $(\mathfrak{Z}(\Omega), \prec)$ yukarı doğru yönlenmiş bir kümedir; $\prec$ 'ya $\mathfrak{Z}(\Omega)$ 'nın **doğal sıralaması** diyecek ve $(x_{\mathcal{Z}})$ bir $(\mathfrak{Z}(\Omega), \prec)$ ağı ise limitini sırasıyla

$$\lim_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)} x_{\mathcal{Z}}, \text{ veya } \lim_{\mathcal{Z}} x_{\mathcal{Z}} \text{ veya kısaca } \lim x_{\mathcal{Z}}$$

ile göstereceğiz.

$\mathcal{Z} = \{A_i\}_{1 \leq i \leq k} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ olmak üzere $\|\mathcal{Z}\| := \max_{1 \leq i \leq k} d(A_i)$ sayısına $\mathcal{Z}$ parçalanışının **normu** denir. $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$ ise $\|\mathcal{Z}'\| \leq \|\mathcal{Z}\|$ olduğu apaçıktır. $i = 1, 2$ için $\mathcal{Z}_i \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ ise $\|\mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2\| \leq \|\mathcal{Z}_i\|$ geçerlidir.

$$\mathcal{Z} \leq \mathcal{Z}' : \Longleftrightarrow \|\mathcal{Z}'\| \leq \|\mathcal{Z}\|$$

olarak açıklansın. $(\mathfrak{Z}(\Omega), \leq)$ yukarı doğru yönlenmiş bir kümedir; buna **metrikssel sıralama** diyelim. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yerine herhangi bir X kümesi aldığımızda parçalanışlar ve $\prec$ sıralaması anlamlıdır. Ancak $\|\mathcal{Z}\|$ normu ancak X bir metrik uzaysa anlamlıdır. Dolayısıyla herhangi bir kümeye aktarılabilen $\prec$ sıralaması, yalnız metrik uzaylarda geçerli olan $\leq$ sıralamasından daha kullanışlıdır. Bir $(x_{\mathcal{Z}})$ ağıının metrikssel sıralamaya göre limitini

$$\lim_{\|\mathcal{Z}\| \rightarrow 0} x_{\mathcal{Z}}$$

ile göstereceğiz. Bir $(Z_k) \subset \mathfrak{Z}(\Omega)$ dizisinin metriksel sıralamada sondaş olması tam da $\lim \|Z_k\| = 0$ olması demektir. Bu yüzden metrik sıralamadaki sondaş dizilere **sıfır dizileri** de denir. $(\mathfrak{Z}(\Omega), \leq)$ 'de sıfır dizilerinin varlığı apaçıktır. Dizi Ölçütü 1.1.11 ile

$$\lim_{\|Z\| \rightarrow 0} x_Z = a \iff \text{Her sondaş } (Z_k) \text{ için } \exists \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{Z_k} = a.$$

Not 2.3.1 $(\mathfrak{Z}(\Omega), \prec)$ ve $(\mathfrak{Z}(\Omega), \leq)$ sıralamaları arasında temel bir fark vardır. Okurun da kolayca göreceği gibi $(\mathfrak{Z}(\Omega), \leq)$ 'de sondaş diziler vardır; ancak $(\mathfrak{Z}(\Omega), \prec)$ 'de öyle değil. Örneğin $\Omega = [a, b]$ olsun. Bir $Z \in \mathfrak{Z}([a, b])$ parçalanışını $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ olmak üzere $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ olarak yazabiliriz. Şimdi $(\mathfrak{Z}(\Omega), \prec)$ 'de herhangi bir (Z_k) dizisi verilsin. $\bigcup Z_k$ sayılabilir olduğunda bir $c \in [a, b]$ 'yi $c \notin \bigcup Z_k$ olacak biçimde seçebiliriz. $Z' := \{a, c, b\}$ seçelim. Hiçbir Z_k ile $Z' \prec Z_k$ sağlanmaz! Dolayısıyla (Z_k) dizisi sondaş olamaz. $\blacktriangle$

$Z = \{A_i\} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ parçalanışı verilsin. Her bir A_i 'den bir a_i seçilmiş olsun; bu durumda $a := (a_i) \in Z$ diyelim ve tüm bu veriyi kısaca $Z(a)$ ile belirtelim.

$$\mathfrak{Z}^*(\Omega) := \{Z(a) | a \in Z\}$$

olsun. $\mathfrak{Z}^*(\Omega)$ 'da $\prec$ yukarı doğru yönlendirmesi her $Z(a), Z'(a')$ için

$$Z(a) \prec Z'(a') \iff Z \prec Z'$$

olarak açıklansın. Bu yönlendirme a_i ve a'_i 'lerin seçiminde bağımsızdırlar.

Her $Z(a) \in \mathfrak{Z}^*(\Omega)$ için

$$R(f, Z(a)) := \sum_{i=1}^k f(a_i) j_n(A_i) \quad (2.37)$$

sayısına f 'nin $Z(a)$ 'ya göre **Riemann toplamı** denir. Riemann toplamı vektör değerli fonksiyonlar için de anlamlıdır.

$Z(a) \in \mathfrak{Z}^*(\Omega)$ için $\|Z(a)\| := \|Z\|$ ve her $Z(a), Z'(a')$ için

$$Z(a) \leq Z'(a') \iff Z \leq Z'$$

olarak açıklansın. Bu yönlendirme a_i ve a'_i 'lerin seçiminde bağımsızdırlar ve $(\mathfrak{Z}^*(\Omega), \leq)$ yukarı doğru yönlendirilmiş bir kümedir. $Z, Z' \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ ve $Z(a), Z'(a') \in \mathfrak{Z}^*(\Omega)$ ise

$$Z \prec Z' \implies Z \leq Z' \text{ ve } Z(a) \prec Z'(a') \implies Z(a) \leq Z'(a'). \quad (2.38)$$

Bu çıkarımların tersleri doğru değildir. Buradan aşağıdaki önerme çıkar.

Lemma 2.3.2 *Bir (x_Z) ağı için*

$$\lim_{\|Z\| \rightarrow 0} x_Z = a \implies \lim_Z x_Z = a, \quad (2.39)$$

özellikle

$$\lim_{\|Z\| \rightarrow 0} R(f, Z(a)) = \alpha \implies \lim_Z R(f, Z) = \alpha.$$

Kanıt. $\lim_{\|Z\| \rightarrow 0} x_Z = a$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Tanımdan bir Z_ε parçalanışı, her Z parçalanışı için $\|Z\| \leq \|Z_\varepsilon\|$ ise $|x_Z - a| < \varepsilon$ olacak biçimde vardır. Bu durumda her $Z \succ Z_\varepsilon$ için $\|Z\| \leq \|Z_\varepsilon\|$ olduğundan $|x_Z - a| < \varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla $\lim_Z x_Z = a$ olur. Diğer sav benzer biçimde kanıtlanır. ■

Önsavımızdaki çıkarımların ters yönleri genelde doğru değildirler. Ancak Teorem 2.3.13'de göstereceğimiz gibi, bizi ilgilendiren ağlar için bu çıkarımların ters yönleri doğrudur.

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı olduğundan $m, M \in \mathbb{R}$ sayıları her $x \in \Omega$ için $m \leq f(x) \leq M$ olacak biçimde vardır. Ω 'nın her $Z = \{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ parçalanışı için,

$$m_i := m_{f, A_i} := \inf_{x \in A_i} f(x) \text{ ve } M_i := M_{f, A_i} := \sup_{x \in A_i} f(x)$$

olmak üzere

$$A(f, Z) := \sum_{i=1}^k m_i j_n(A_i) \text{ ve } U(f, Z) := \sum_{i=1}^k M_i j_n(A_i) \quad (2.40)$$

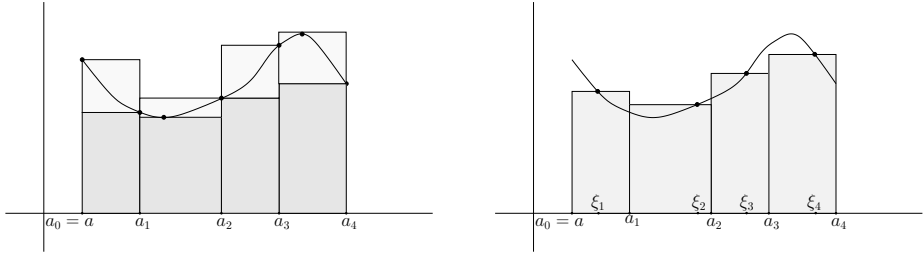
toplamlarına sırasıyla f 'nin Z parçalanışına göre **alttoplami** ve **üsttoplami** denir. Ancak burada bir sorun var: $A_i = \emptyset$ ise $m_i = +\infty$, $M_i = -\infty$ ve $j_n(\emptyset) = 0$ olur. Bu durumda $(\pm\infty) \cdot 0$ 'dan ne anlayacağız? İki seçeneğimiz var; birincisi her defasında (2.40)'taki toplamları $A_i \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan i 'ler üzerinden yapacağımızı belirtmek, ikincisi ise aynı sonucu verecek olan $(\pm\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (\pm\infty) := 0$ uzlaşmasını yapmak. Biz burada ve ölçü kuramında ikinci seçeneği yeğleyeceğiz. Bizi $(A(f, Z))_{Z \in \mathfrak{Z}(\Omega)}$ ve $(U(f, Z))_{Z \in \mathfrak{Z}(\Omega)}$ ağları, yalın gösterimle $(A(f, Z))_Z$ ve $(U(f, Z))_Z$ ağları ilgilendirecektir.

Uzlaşma: $(\pm\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (\pm\infty) := 0$.

$$\emptyset \neq B \subset A \implies m_{f, A} \leq m_{f, B} \leq M_{f, B} \leq M_{f, A} \quad (2.41)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Dolayısıyla $Z, Z' \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ ve $Z \prec Z'$ ise

$$m j_n(\Omega) \leq A(f, Z) \leq A(f, Z') \leq U(f, Z') \leq U(f, Z) \leq M j_n(\Omega) \quad (2.42)$$



Şekil 2.1: Riemann ve salınım toplamalarını gösteren iki figür.

elde edilir. Bu eşitsizlik çok yararlıdır. Her $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için

$$A(f, \mathcal{Z}_1) \leq A(f, \mathcal{Z}_1 \cdot \mathcal{Z}_2) \leq U(f, \mathcal{Z}_1 \cdot \mathcal{Z}_2) \leq U(f, \mathcal{Z}_2) \quad (2.43)$$

olur, dd hiç bir alttoplam hiç bir üsttoplamdan büyük olamaz! Ayrıca $M_{f,A} = -m_{-f,A}$ olduğundan

$$U(f, \mathcal{Z}) = -A(-f, \mathcal{Z}).$$

Özetle

$$mj_n(\Omega) \leq A(f, \mathcal{Z}) \leq R(f, \mathcal{Z}(a)) \leq U(f, \mathcal{Z}) \leq Mj_n(\Omega) \quad (2.44)$$

geçerlidir. $sl(f, A_i) := \sup \{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in A_i\}$ olmak üzere

$$Sl(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^k sl(f, A_i)j_n(A_i) = U(f, \mathcal{Z}) - A(f, \mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^k (M_i - m_i)j_n(A_i) \quad (2.45)$$

sayısına f 'nin $\mathcal{Z}$ parçalanışına göre **salınım toplamı** denir⁹. $A(f, \mathcal{Z})$ ve $U(f, \mathcal{Z})$ toplamaları yalnızca $\mathbb{R}$ -değerli fonksiyonlar için anlamlı iken $sl(f, A_i)$ ve $Sl(f, \mathcal{Z})$ kavramları V -değerli fonksiyonlar için de anlamlıdırlar.

$$\int_{\underline{\Omega}} f \equiv \int_{\underline{\Omega}} f dj_n := \sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)} A(f, \mathcal{Z}) \text{ ve} \quad (2.46)$$

$$\overline{\int}_{\Omega} f \equiv \overline{\int}_{\Omega} f dj_n := \inf_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)} U(f, \mathcal{Z}) \quad (2.47)$$

⁹ $A \subset \mathbb{R}^n$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ için $sl(f, A) := \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)|$ sayısına f fonksiyonunun A 'daki **salınımı** denir. Eğer $A \neq \emptyset$ ve sağ yan $\infty - \infty$ tipinde değilse $sl(f, A) = \sup f(A) - \inf f(A)$. $x \in A$ için $M(f, x) := \limsup_{z \rightarrow x} f(z)$ ve $m(f, x) := \liminf_{z \rightarrow x} f(z)$ olmak üzere $sl(f, x) := M(f, x) - m(f, x)$ sayısına f 'nin x 'teki **salınımı** denir. $sl(f, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} sl(f, B_{\varepsilon}(x))$.

sayılarına ise, sırasıyla, f 'nin Ω 'daki **altintegrali** ve **üstintegrali** denir. (2.44)'ten dolayı $\int_{\Omega} f, \overline{\int}_{\Omega} f \in \mathbb{R}$ ve

$$\int_{\Omega} f \leq \overline{\int}_{\Omega} f \text{ ve } \overline{\int}_{\Omega} f = - \int_{\Omega} (-f).$$

(2.42)'den dolayı $(A(f, \mathcal{Z}))_{\mathcal{Z}}$ monoton artan ve üstten sınırlı, $(U(f, \mathcal{Z}))_{\mathcal{Z}}$ ise monoton azalan ve alttan sınırlı olduklarından Önerme 1.1.8 ile

$$\int_{\Omega} f = \lim_{\mathcal{Z}} A(f, \mathcal{Z}) \text{ ve } \overline{\int}_{\Omega} f = \lim_{\mathcal{Z}} U(f, \mathcal{Z}). \quad (2.48)$$

Şimdi $f \geq 0$ için bu toplamaları görselleştirelim.

$$s_{f\mathcal{Z}} := \bigsqcup_i A_i \times [0, m_i], \quad S_{f\mathcal{Z}} := \bigsqcup_i A_i \times [0, M_i] \text{ ve } G_{f\mathcal{Z}} := \bigsqcup_i A_i \times [m_i, M_i]$$

olsunlar. $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de sonlu sayıda ölçülebilir ayrık silindirlerin birleşimi olarak $s_{f\mathcal{Z}}, S_{f\mathcal{Z}}$ ve $G_{f\mathcal{Z}}$ Jordan ölçülebilir ve

$$A(f, \mathcal{Z}) = j_{n+1}(s_{f\mathcal{Z}}), \quad U(f, \mathcal{Z}) = j_{n+1}(S_{f\mathcal{Z}}), \quad j_{n+1}(G_{f\mathcal{Z}}) = \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) \quad (2.49)$$

oluğundan, $s_{f\mathcal{Z}} \subset [0, f] \subset S_{f\mathcal{Z}}$ olduğunu da gözetirsek,

$$\int_{\Omega} f \leq j_{n+1}([0, f]) \leq \overline{j}_{n+1}([0, f]) \leq \overline{\int}_{\Omega} f \text{ ve } \overline{j}_{n+1}(G_f) \leq \inf_{\mathcal{Z}} \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) \quad (2.50)$$

olur. Bu durumda

$$\int_{\Omega} f = \overline{\int}_{\Omega} f =: \alpha \implies [0, f] \in \mathcal{J}^{n+1} \text{ ve } j_{n+1}([0, f]) = \alpha. \quad (2.51)$$

$[0, f]$ 'nin Jordan ölçülebilir olması $\partial[0, f]$ 'nin sıfır hacimli olmasına denk olduğundan:

$$\int_{\Omega} f = \overline{\int}_{\Omega} f \implies \partial[0, f] \text{ sıfır hacimli, özellikle } j_{n+1}(G_f) = 0. \quad (2.52)$$

Not 2.3.3 Devam etmeden önce belirtmemiz gereken bir şey var. Jordan ölçülebilir $A_1, \dots, A_k$ kümeleri ile $\Omega = \bigcup_{i=1}^k A_i$ ve $i \neq j$ için $\mathring{A}_i \cap \mathring{A}_j = \emptyset$ ise $\mathcal{Z} = \{A_i | i = 1, \dots, k\}$ ailesi Ω 'nın bir **girişimsiz parçalanış**ıdır denir. Ω 'nın **girişimsiz parçalanışlarının kümesini** $\mathfrak{Z}_g(\Omega)$ ile gösterelim. Çoğu yazar (2.46) ve (2.47)'de $\mathfrak{Z}(\Omega)$ yerine $\mathfrak{Z}_g(\Omega)$ alarak çalışır. Her iki yaklaşımda aynı sonucu verir. Bir yandan $\mathfrak{Z}(\Omega) \subset \mathfrak{Z}_g(\Omega)$ olduğundan

$$\sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)} A(f, \mathcal{Z}) \leq \sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_g(\Omega)} A(f, \mathcal{Z}) \leq \inf_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_g(\Omega)} U(f, \mathcal{Z}) \leq \inf_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)} U(f, \mathcal{Z}). \quad (2.53)$$

Diğer yandan $\mathcal{Z}^* \in \mathfrak{Z}_g(\Omega)$ keyfi verilsin ve $\mathcal{Z}^* = \{Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_k^*\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{Z}^* \prec \mathcal{Z}$ koşulunu sağlayan bir $\mathcal{Z}$ parçalanışının $A(f, \mathcal{Z}^*) \leq A(f, \mathcal{Z})$ ve $U(f, \mathcal{Z}) \leq U(f, \mathcal{Z}^*)$ koşulunu sağlayacak biçimde bulunabileceğini göstereceğiz. Bu durumda

$$\sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_g(\Omega)} A(f, \mathcal{Z}) \leq \sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)} A(f, \mathcal{Z}) \leq \inf_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)} U(f, \mathcal{Z}) \leq \inf_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_g(\Omega)} U(f, \mathcal{Z}) \quad (2.54)$$

olur. Sonuçta $\sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_g(\Omega)} A(f, \mathcal{Z}) = \sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)} A(f, \mathcal{Z})$ ve $\inf_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)} U(f, \mathcal{Z}) = \inf_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_g(\Omega)} U(f, \mathcal{Z})$ elde edilir ve her iki yaklaşım çakışır. Şimdi $\mathcal{Z}^*$ 'dan $\mathcal{Z}'$ 'ye geçişi verelim. k üzerinden tümevarımla kanıtlanır. $k = 1$ için kanıtlanacak bir şey yoktur. $k = 2$ için kanıtı verelim. $\mathcal{Z}^* = \{Z_1^*, Z_2^*\}$ olsun. $Z_{12} := Z_1^* \cap Z_2^*$, $Z_i := Z_i^* \setminus Z_{12}$ ve $\mathcal{Z} := \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ olsun. Açıkça $\mathcal{Z}^* \prec \mathcal{Z}$. $\mathcal{Z}^*$ girişimsiz olduğundan Z_{12} sıfır hacimlidir ve $j_n(Z_i) = j_n(Z_i^*)$. Ayrıca $Z_i \subset Z_i^*$ olduğundan $\inf f(Z_i^*) \leq \inf f(Z_i)$ ve $\sup f(Z_i) \leq \sup f(Z_i^*)$ olur. $j_n(Z_{12}) = 0$ olduğunu gözetirsek $A(f, \mathcal{Z}^*) \leq A(f, \mathcal{Z})$ ve $U(f, \mathcal{Z}) \leq U(f, \mathcal{Z}^*)$ olur. Dolayısıyla (2.54) sağlanır. Her k için sav tümevarımla benzer biçimde kanıtlanır.

Girişimsizlik bir topolojik kavramdır; herhangi bir kümeye aktarılamaz. Herhangi bir kümede de integrasyon kuramı yapılabilir; bu nedenle parçalanışlarla çalışmayı yeğledik.

▲

Tanım 2.3.4 (1) $\int_{\Omega} f = \overline{\int_{\Omega} f}$ ise f fonksiyonu Ω 'da **Darboux integrallenebilir** ve

$$\int_{\Omega} f \equiv \int_{\Omega} f dj_n := \int_{\underline{\Omega}} f = \overline{\int_{\Omega} f}$$

sayısına ise f 'nin Ω 'daki **Darboux integrali** denir. $n = 1$ ve $\Omega = \langle a, b \rangle$ durumunda $\int_{\langle a, b \rangle} f$ yerine $\int_a^b f$ yazmak bir gelenektir.

(2) $(R(f, \mathcal{Z}(a)))_{\mathcal{Z}(a)}$ ağı yakınsak ve $\lim_{\mathcal{Z}} R(f, \mathcal{Z}(a)) = \alpha$ ise f fonksiyonu Ω 'da **Riemann integrallenebilir** ve **Riemann integrali** α 'dır denir.

(3) Bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı ile $\lim_{\|\mathcal{Z}\| \rightarrow 0} R(f, \mathcal{Z}(a)) = \alpha$ ise f fonksiyonu Ω 'da ***Riemann integrallenebilir** ve ***Riemann integrali** α 'dır diyelim (Bu, Riemann'ın tanımıdır).¹⁰

$\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı ile $\lim_{\|\mathcal{Z}\| \rightarrow 0} R(f, \mathcal{Z}(a)) = \alpha$ olması aşağıdaki önermeye denktir:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathcal{Z}(a) \in \mathfrak{Z}^*(\Omega) (\|\mathcal{Z}(a)\| < \delta \implies |R(f, \mathcal{Z}(a)) - \alpha| < \varepsilon). \quad (2.55)$$

Biz bu üç kavramın birbirine denk olduğunu kanıtlayacağız.

Lemma 2.3.5 $j_n(\Omega) = 0$ ise her sınırlı $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ **Darboux integrallenebilir** ve $\int_{\Omega} f = 0$.

¹⁰Biz Önerme 2.3.11'de Darboux ve Riemann integrallenebilirlik kavramlarının örtüşüğünü kanıtlayacağız. Bu nedenle okura, içinde Darboux geçen her tümceyi, bir kez de Darboux yerine Riemann olarak okumasını öneririz.

Kanıt. Koşullarımızdan her $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için $A(f, \mathcal{Z}) = U(f, \mathcal{Z}) = 0$. Bu, savı verir. ■

Bu önsavdan dolayı incelemelerimizde $j_n(\Omega) > 0$ durumlarına odaklanabiliriz.

Önerme 2.3.6 (ε -ölçütü) *Sınırlı $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Darboux integrallenebilir olması için gvyk her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ parçalanışının $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmesidir.*

Kanıt. $\implies$: $\alpha := \int_{\Omega} f$ olsun ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ parçalanışlarını $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < A(f, \mathcal{Z}_1)$ ve $U(f, \mathcal{Z}_2) < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ olarak seçersek (2.43)'ten $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}_1 \cdot \mathcal{Z}_2) < \varepsilon$ elde edilir.

$\impliedby$: Sav aşağıdaki eşitsizlikten çıkar: Her $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için

$$0 \leq \overline{\int_{\Omega} f} - \underline{\int_{\Omega} f} \leq U(f, \mathcal{Z}) - A(f, \mathcal{Z}) = \text{Sl}(f, \mathcal{Z}).$$

$A \subset \Omega$ Jordan ölçülebilirse her $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için $\mathcal{Z} \cap A \in \mathfrak{Z}(A)$ ve $\text{Sl}(f|_A, \mathcal{Z} \cap A) \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z})$ olduğundan ε -ölçütü şu sonucu verir: f fonksiyonu Ω 'da Darboux integrallenebilirse her Jordan ölçülebilir $A \subset \Omega$ kümesinde de $f|_A$ Darboux integrallenebilir.

Önerme 2.3.7 f 'nin Darboux integrallenebilir ve $\int_{\Omega} f = \alpha$ olması için gvyk koşul bir $(\mathcal{Z}_n) \subset \mathfrak{Z}(\Omega)$ için

$$\lim A(f, \mathcal{Z}_n) = \lim U(f, \mathcal{Z}_n) = \alpha$$

olmasıdır. Burada $(\mathcal{Z}_n)$ 'nin bir sondaş dizi olması veya $\|\mathcal{Z}_n\| \rightarrow 0$ istenmemiştir!

Kanıt. (1) Bir $(\mathcal{Z}_n)$ dizisi için $\lim A(f, \mathcal{Z}_n) = \lim U(f, \mathcal{Z}_n) = \alpha$ olsun. Hipotezden $\lim \text{Sl}(f, \mathcal{Z}_n) = 0$. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için bir $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_{\varepsilon}$ için $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}_n) < \varepsilon$ olacak biçimde vardır. ε -ölçütünden f Darboux integrallenebilir.

$$\alpha = \lim A(f, \mathcal{Z}_n) \leq \underline{\int_{\Omega} f} \leq \overline{\int_{\Omega} f} \leq \lim U(f, \mathcal{Z}_n) = \alpha,$$

eşitsizliğinden $\underline{\int_{\Omega} f} = \overline{\int_{\Omega} f} = \alpha = \int_{\Omega} f$.

(2) $\exists \int_{\Omega} f = \alpha$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $\mathcal{Z}'_n, \mathcal{Z}''_n \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ parçalanışları

$$U(f, \mathcal{Z}'_n) < \alpha + \frac{1}{n} \text{ ve } A(f, \mathcal{Z}''_n) > \alpha - \frac{1}{n}$$

olacak biçimde bulunabilir. $\mathcal{Z}_n := \mathcal{Z}'_n \mathcal{Z}''_n$ ise her $n \in \mathbb{N}^*$ için

$$\alpha - \frac{1}{n} < A(f, \mathcal{Z}_n) \leq U(f, \mathcal{Z}_n) < \alpha + \frac{1}{n}.$$

Dolayısıyla $\lim A(f, \mathcal{Z}_n) = \lim U(f, \mathcal{Z}_n) = \alpha$. ■

Sonuç 2.3.8 *f düzgün sürekli ise Darboux integrallenebilir. Özellikle Ω kompakt ve f sürekli ise f Darboux integrallenebilir.*

Kanıt. Önsav 2.3.5'ten dolayı $j_n(\Omega) > 0$ varsayabiliriz. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısını $\|x - y\| < \delta_\varepsilon$ olan her $x, y \in \Omega$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/j_n(\Omega)$ olacak biçimde seçelim. $\mathcal{Z} := \{A_1, \dots, A_k\} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ ve $\|\mathcal{Z}\| < \varepsilon$ ise

$$\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^k \text{sl}(f, A_i) j_n(A_i) \leq \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon}{j_n(\Omega)} j_n(A_i) = \frac{\varepsilon}{j_n(\Omega)} \sum_{i=1}^k j_n(A_i) = \varepsilon$$

olur. Bu, ε -ölçütü ile savı verir. Kompakt kümelerdeki sürekli fonksiyonlar düzgün sürekli; bu savın kalanını verir. ■

Sonuç 2.3.9 $-\infty < a < b < +\infty$ ve $\Omega = \langle a, b \rangle$ olmak üzere her monoton ve sınırlı $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ Darboux integrallenebilir.

Kanıt. Gbk f monoton artan olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $M > 0$ ve $f(\Omega) \subset [-M, M]$ olsun. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ olsun. $I_1 = \langle x_0, x_1 \rangle$, $2 \leq k \leq m-1$ için $I_k = [x_{k-1}, x_k)$ ve $I_m = [x_{m-1}, x_m)$ olsun. $\mathcal{Z} = \{I_1, \dots, I_n\} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için, f monoton olduğundan, $\text{sl}(f, I_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$ olduğunu da gözetirsek

$$\begin{aligned} \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right) \|\mathcal{Z}\| = 2M \|\mathcal{Z}\|. \end{aligned}$$

$\mathcal{Z}$ 'yi $\|\mathcal{Z}\| < \frac{\varepsilon}{2M}$ olacak biçimde seçersek $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < \varepsilon$ olur. Sav ε -ölçütünden çıkar. ■

Biz bir monoton fonksiyonun sayılabilir çoklukta süreksizlik noktaları olabileceğini biliyoruz. Şimdilik *Darboux integrallenebilir bir fonksiyonun sayılabilir çoklukta süreksizlik noktaları olabileceğini öğrendik.*

Lemma 2.3.10 $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{1 \leq i \leq k} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsinler. $a_i, b_i \in A_i$ noktaları

$$A(f, \mathcal{Z}) \leq R(f, \mathcal{Z}(a)) < A(f, \mathcal{Z}) + \varepsilon \text{ ve } U(f, \mathcal{Z}) - \varepsilon < R(f, \mathcal{Z}(b)) \leq U(f, \mathcal{Z}) \quad (2.56)$$

olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. $j_n(\Omega) = 0$ ise her $\mathcal{Z}$ için $A(f, \mathcal{Z}) = R(f, \mathcal{Z}(a)) = U(f, \mathcal{Z}) = 0$ olacağından sav aşıkardır. Şimdi $j_n(\Omega) > 0$ olsun. $a_i \in A_i$ noktalarını

$$m_i \leq f(a_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{j_n(\Omega)}, \quad 1 \leq i \leq k$$

olacak biçimde seçebiliriz. Bu durumda

$$A(f, \mathcal{Z}) \leq R(f, \mathcal{Z}(a)) < A(f, \mathcal{Z}) + \sum_{i=1}^k j_n(A_i) \frac{\varepsilon}{j_n(\Omega)} = A(f, \mathcal{Z}) + \varepsilon$$

elde edilir. Savın diğer yarısı benzer biçimde kanıtlanır. ■

Önerme 2.3.11 (Denklik Önermesi) $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 'nin Darboux integrallenebilir ve $\int_{\Omega} f = \alpha$ olması için gvyk Riemann integrallenebilir ve $\lim_{\mathcal{Z}} R(f, \mathcal{Z}(a)) = \alpha$ olmasıdır.

Kanıt. (1) f Darboux integrallenebilir ve $\alpha = \int_{\Omega} f$ olsun. (2.44) ve Önerme 1.1.7 (iii) ile $\lim_{\mathcal{Z}} R(f, \mathcal{Z}(a))$ var ve α 'ya eşittir.

(2) $\lim_{\mathcal{Z}} R(f, \mathcal{Z}(a)) = \alpha$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir $\mathcal{Z}_{\varepsilon}(a_{\varepsilon})$ parçalanışı her $\mathcal{Z}_{\varepsilon}(a_{\varepsilon}) \prec \mathcal{Z}(a)$ için $|R(f, \mathcal{Z}(a)) - \alpha| < \varepsilon$ olacak biçimde vardır. Bu ve (2.56) eşitsizliklerinden her $\mathcal{Z}_{\varepsilon} \prec \mathcal{Z}$ için $|A(f, \mathcal{Z}) - \alpha| \leq \varepsilon$ ve $|U(f, \mathcal{Z}) - \alpha| \leq \varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla $(A(f, \mathcal{Z}))$ ve $(U(f, \mathcal{Z}))$ ağırları yakınsaktır ve limitleri α 'dır. Sonuçta f Darboux integrallenebilir ve $\int_{\Omega} f = \alpha$. ■

Lemma 2.3.12 Ω Jordan ölçlebilir ve $\mathcal{Z}^* = \{A_1^*, \dots, A_k^*\} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı izleyen önerme sağlanacak biçimde bulunabilir: $\|\mathcal{Z}\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $\mathcal{Z} = \{A_j\}_{1 \leq j \leq m} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için, A_j 'lerin herhangi bir A_i^* 'ye düşmeyenlerinin hacimleri toplamı ε 'dan küçüktür.

Kanıt. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Her ∂A_i^* sıfır hacimli olduğundan bir F_i açık figürü, $\partial A_i^* \subset F_i$ ve $v_n(F_i) < \varepsilon/k$ olacak biçimde seçilebilir. ∂A_i^* ve $\overline{A_i^*} \setminus F_i$ ayrık kompakt kümelerinin birbirine uzaklığı δ_i ($\delta_i > 0$!) ve $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$ olsun. $\|\mathcal{Z}\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $\mathcal{Z} = \{A_j\}_{1 \leq j \leq m} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için, A_j 'lerin herhangi bir A_i^* 'ye düşmeyenlerinin birleşimi $\bigcup_{i=1}^k F_i$ 'ye düşer; dolayısıyla bu A_j 'lerin hacimleri toplamı $\leq \sum_{i=1}^k v_n(F_i) < k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$ olur. ■

Teorem 2.3.13 (Denklik Teoremi) “Riemann integrallenebilir” ve “*Riemann integrallenebilir” kavramları denktirler, dd

$$\exists \lim_{\mathcal{Z}} R(f, \mathcal{Z}(a)) = \alpha \iff \exists \lim_{\|\mathcal{Z}\| \rightarrow 0} R(f, \mathcal{Z}(a)) = \alpha.$$

Kanıt. Önsav 2.3.2'den dolayı

$$\exists \lim_{\mathcal{Z}} R(f, \mathcal{Z}(a)) = \alpha \implies \exists \lim_{\|\mathcal{Z}\| \rightarrow 0} R(f, \mathcal{Z}(a)) = \alpha$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$\exists \lim_{\mathcal{Z}} R(f, \mathcal{Z}(a)) = \alpha$ olsun. Her $\mathcal{Z}(a) \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için α ve $R(f, \mathcal{Z}(a))$ 'nin her ikisi de $[A(f, \mathcal{Z}), U(f, \mathcal{Z})]$ aralığına düştüğünden şunu göstermek yeterlidir: Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı, $\|\mathcal{Z}\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $\mathcal{Z}$ için $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilir.

f sınırlı olduğu için bir $K > 0$ ile her $x \in \Omega$ için $|f(x)| \leq K$ olur. Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Önerme 2.3.6 ile bir $\mathcal{Z}^* \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ parçalanışı $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}^*) < \frac{\varepsilon}{2}$ olarak seçilebilir. $\mathcal{Z}^* = \{A_1^*, \dots, A_k^*\}$ olsun. $\mathcal{Z}^*$ ve $\varepsilon/2K$ için Önsav 2.3.12'ye göre $\delta > 0$ sayısını seçelim. Şimdi $\|\mathcal{Z}\| < \delta$ olan bir $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ verilsin. $\mathcal{Z} = \{A_1, \dots, A_q\}$ olsun; bunlardan herhangi bir A_i^* 'ye düşmeyenler tam da $A_{p+1}, \dots, A_q$ olsun. $a_i \in A_i$ nasıl seçilirse seçilsin

$$\begin{aligned} R(f, \mathcal{Z}(a)) &= \sum_{\nu=1}^p f(a_\nu) v_n(A_\nu) + \sum_{\nu=p+1}^q f(a_\nu) v_n(A_\nu) \\ &\leq U(f, \mathcal{Z}^*) + K \frac{\varepsilon}{2K} = U(f, \mathcal{Z}^*) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Benzer biçimde

$$R(f, \mathcal{Z}(a)) \geq A(f, \mathcal{Z}^*) - \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.58)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < \varepsilon$ ve $|R(f, \mathcal{Z}(a)) - \alpha|$ olur; işimiz biter. ■

Sonuç 2.3.14 f Riemann integrallenebilir, $(\mathcal{Z}_k(a)) \subset \mathfrak{Z}(\Omega)$ ve $\|\mathcal{Z}_k\| \rightarrow 0$ ise $\int_{\Omega} f = \lim R(f, \mathcal{Z}_k(a))$.

Kanıt. $\|\mathcal{Z}_k(a)\| \rightarrow 0$ ise $(\mathcal{Z}_k(a))$ bir sondaş dizidir; Teorem 1.1.11 savı verir. ■

Bu sonuçtan dolayı, eğer f 'nin Riemann integrallenebilir olduğunu biliyor ve integralini hesaplamak istiyorsak, işimizin kolaydır: $\|\mathcal{Z}_k\| \rightarrow 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir parçalanış dizisi ile $\int_{\Omega} f = \lim_k R(f, \mathcal{Z}_k(a))$.

Uzlaşma: Bundan sonra yalnızca Riemann integrallenebilir adlandırmasını kullanacağız.

$$\mathcal{R}(\Omega) \equiv \mathcal{R}(\Omega, \mathbb{R}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ sınırlı ve Riemann integrallenebilir}\}$$

olsun.

Tanım 2.3.15 $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ sınırlı bir dönüşüm olsun. Eğer $\lim_{Z \in \mathfrak{Z}(\Omega)} R(f, Z(a))$ var ve bu limit b ise f fonksiyonu Ω 'da **Riemann integrallenebilir** ve integrali b 'dir denir.

$R(f, Z(a)) = (R(f_1, Z(a)), \dots, R(f_m, Z(a)))$ olduğundan f 'nin Riemann integrallenebilir olması, her bir f_i 'nin Riemann integrallenebilir olmasına denktir ve bu durumda

$$\int_{\Omega} f = \left(\int_{\Omega} f_1, \dots, \int_{\Omega} f_m \right).$$

Bu nedenle $m = 1$ durumunu incelemekle yetineceğiz. Ayrıca $\mathbb{C}$ 'yi $\mathbb{R}^2$ gibi düşünersek, bir $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olması $\operatorname{Re} f$ ve $\operatorname{Im} f$ 'nin Riemann integrallenebilir olmasına denktir.

Örnek 2.3.16. (1) $\mathcal{Z} = \{A_1, \dots, A_k\} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ olmak üzere

$$t = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R} \quad (2.59)$$

tipindeki fonksiyonlara bir **$\mathcal{Z}$ -merdiven fonksiyonu** diyelim ve bunların kümesini $\mathcal{M}_r(\mathcal{Z})$ ile gösterelim¹¹. $\mathcal{M}_r(\Omega) := \bigcup_{Z \in \mathfrak{Z}(\Omega)} \mathcal{M}_r(Z)$ ile Ω 'daki tüm merdiven fonksiyonlarının kümesini gösterelim. $t \in \mathcal{M}_r(Z)$ ve $Z \prec Z'$ ise $t \in \mathcal{M}_r(Z')$. Bunun bir sonucu olarak $k = 1, 2$ için $t_k \in \mathcal{M}_r(Z_k)$ ise $t_1, t_2 \in \mathcal{M}_r(Z_1 Z_2)$. buradan aşağıdaki sav kolayca çıkar.

$\mathcal{M}_r(\Omega)$ bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayıdır ve ayrıca $t_1, t_2 \in \mathcal{M}_r(\Omega)$ ise $\max(t_1, t_2)$, $\min(t_1, t_2)$ ve ayrıca t_2 sıfır değerini almıyorsa t_1/t_2 fonksiyonu da $\mathcal{M}_r(\Omega)$ 'dadır.

$t \in \mathcal{M}_r(\Omega)$ ise bir $Z \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ ile $t \in \mathcal{M}_r(Z)$. Bu durumda $\operatorname{Sl}(t, Z) = 0$ olduğundan, ε -ölçütü ile t Riemann integrallenebilir. $t = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{A_i}$ ise

$$\int_{\Omega} t = \sum_{i=1}^k c_i v_n(A_i).$$

olduğu kolayca görülür. Şimdi $\mathbb{H}_+^{n+1} := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) | x_{n+1} \geq 0\}$ ve benzer şekilde $\mathbb{H}_-^{n+1} := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) | x_{n+1} \leq 0\}$ olsun. $|c_i| v_n(A_i) = v_{n+1}(A_i \times [0, |c_i|])$. t 'nin G_t grafi ile Ω arasındaki bölge, sonlu sayıda ayrık A_i tabanlı ve $|c_i|$ yükseklikli silindirden oluşur. $\int_{\Omega} t$ integrali, bu silindirlerden $\mathbb{H}_+^{n+1}$ 'e düşenlerin hacimleri pozitif ve $\mathbb{H}_-^{n+1}$ 'e düşenlerin hacimleri negatif alınarak, bu silindirlerin hacimleri toplamıdır. Tabanın hacmi sıfır olan, bozuk silindirlere izin verdiğimizizi ayrıca belirtelim. Özel olarak $n = 2$, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $A_1 = [0, 1/2] \times [0, 1]$, $A_2 = [1/2, 1] \times [0, 1]$ ve $c_1 \neq c_2$ olmak üzere $t = c_1 \mathbf{1}_{A_1} + c_2 \mathbf{1}_{A_2}$ olsun. t Riemann integrallenebilir. Ancak şimdi t fonksiyonu $S := \{1/2\} \times [0, 1]$ kümesinde süreksizdir. S sayılamaz, ancak $j_2(S) = 0$! Böylece *Riemann integrallenebilir fonksiyonun sıfır hacimli bir kümede süreksiz olabileceğini öğrendik.*

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonu verilsin. Her $Z = \{A_i\}_{1 \leq i \leq k} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için

$$t_{f,Z} := \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad T_{f,Z} := \sum_{i=1}^k M_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad m_i = \inf f(A_i), \quad M_i = \sup f(A_i) \quad (2.60)$$

¹¹ $\mathcal{M}_r$ yazılımdaki “r” Riemann’a göndermede bulunur. Bunlar bir anlamda Riemann merdivenleridir; ilerde Lebesgue merdivenlerini ele alacağız.

ise $t_{f,Z} \leq f \leq T_{f,Z}$ ve $\int_{\Omega} t_{f,Z} = A(f, Z)$, $\int_{\Omega} T_{f,Z} = U(f, Z)$ olduğundan

$$\int_{\Omega} f = \sup_{Z \in \mathfrak{Z}(\Omega)} \int_{\Omega} t_{f,Z} \quad \text{ve} \quad \overline{\int}_{\Omega} f = \inf_{Z \in \mathfrak{Z}(\Omega)} \int_{\Omega} T_{f,Z} \quad (2.61)$$

olur. Bu nedenle kimi yazar Riemann integrallerine şöyle yaklaşır: Her $t = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{A_i} \in \mathcal{M}_r(\Omega)$ merdiven fonksiyonu için

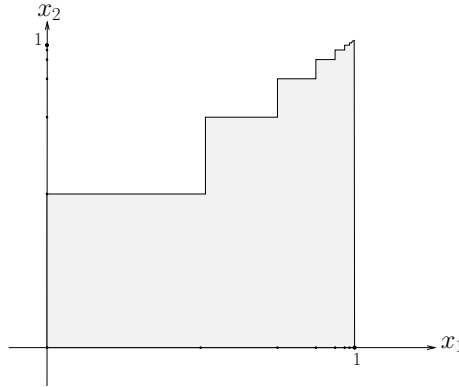
$$\int_{\Omega} t := \sum_{i=1}^k c_i j_n(A_i) \quad (2.62)$$

olarak tanımladıktan sonra alt ve üstintegraller

$$\underline{\int}_{\Omega} f := \sup_{t \in \mathcal{M}_r(\Omega), t \leq f} \int_{\Omega} t \quad \text{ve} \quad \overline{\int}_{\Omega} f := \inf_{t \in \mathcal{M}_r(\Omega), f \leq t} \int_{\Omega} t \quad (2.63)$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Gerisi benzer ilerler.

(2) $n = 1$ ve $\Omega = [0, 1]$ olsun. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ve her $x \in \mathbb{Q} \cap \Omega$ için $f(x) = 1$, diğer noktalarda $f(x) = 0$ olsun; kısaca $A := \Omega \cap \mathbb{Q}$ olmak üzere $f = \mathbf{1}_A$. Her $Z \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için $\text{Sl}(f, Z) = 1$ olduğu kolayca görülür. ε -Ölçütü'nden dolayı f Riemann integrallenemez. $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in A$ için $g(x) = 1$ ve her $x \in \Omega \setminus A$ içinse $g(x) = -1$ olsun. g Riemann integrallenemez, ancak $|g|$ Riemann integrallenebilir! Bir sonraki bölümde öğreneceğimiz Lebesgue integralinde durum farklıdır; orada - ileride öğreneceğimiz kavramlarla-ölçülebilir bir g fonksiyonun Lebesgue integrallenebilir olması için gvyk $|g|$ 'nin Lebesgue integrallenebilir olmasıdır.



Şekil 2.2: Zeno merdiveni.

(3) Zeno merdiveni. $\Omega = [0, 1]$ ve $s_n := \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}$ olsun. (s_n) dizisi kesin monoton artandır ve $s_n \nearrow 1$. Şimdi $A_1 = [0, \frac{1}{2})$ ve $n \geq 2$ içinse $A_n = [s_{n-1}, s_n)$ olsun. Her $m \neq n$ için $A_m \cap A_n = \emptyset$ ve $\Omega = \{1\} \cup \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Şimdi $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her A_n 'de sabit s_n değerini alsın ve $f(1) := 1$ olarak açıklansın. f 'nin grafi, Şekil 2.2'de görüldüğü gibi, sonsuz basamaklı bir merdivendir. f fonksiyonu her s_n noktasında süreksizdir; ancak yine de Sonuç 2.3.9'dan Riemann integrallenebilir. Bunu doğrudan da görebiliriz. Gerçekten de $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. n doğal sayısını $1 - s_n < \varepsilon$ olacak biçimde seçelim. Her A_k için $\text{sl}(f, A_k) = 0$ olduğundan $Z = \{A_1, \dots, A_k\} \cup [s_k, 1]$ parçalanışı için $\text{Sl}(f, Z) = \text{sl}(f, [s_k, 1]) \cdot v_1([s_k, 1]) \leq 1 \cdot (1 - s_k) < \varepsilon$. Bu ve ε -Ölçütü savı verir.

(4) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $p, q \in \mathbb{N}$ ve $x = p/q \in (0, 1)$ için $f(x) = 1/q$ ve her irrasyonel noktada ise 0 olarak açıklansın. f fonksiyonunun irrasyonel noktalarda sürekli ve rasyonel noktalarda süreksiz olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. f fonksiyonu Riemann integrallenebilir. Gerçekten de, $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $q \in \mathbb{N}$ sayısını $1/q < \varepsilon$ olacak biçimde seçelim. Sonlu sayıda noktada $f(x) \geq 1/q$ sağlanır; bunlar $x_0 < x_1 < \dots < x_m$ olarak sıralansınlar. $I_0 = (0, x_0)$, $I_{m+1} = (x_m, 1)$, $1 \leq k \leq m$ için $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ ve son olarak $J_k = \{x_k\}$, $0 \leq k \leq m$ olsun. $(0, 1)$ 'in $\mathcal{Z} = \{I_i\} \sqcup \{J_j\}$ parçalanışı için $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < 1/q < \varepsilon$. (2.3.6)'dan f Riemann integrallenebilir.

Lemma 2.3.17 $f : \Omega \rightarrow [m, M]$ Riemann integrallenebilir ve $\phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz sürekli ise $\phi \circ f$ de Riemann integrallenebilir.

Kanıt. Bir $C > 0$ sabiti ile her $x, y \in [m, M]$ için $|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|$ olsun. Her $x, y \in \Omega$ için $|(\phi \circ f)(x) - (\phi \circ f)(y)| \leq C|f(x) - f(y)|$ olur. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Bir $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ parçalanışını $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < \varepsilon/C$ olacak biçimde seçersek $\text{Sl}(\phi \circ f, \mathcal{Z}) < \varepsilon$ olur. Sav ε -Ölçütü'nden çıkar. ■

Sonuç 2.3.18 (i) $\mathcal{R}(\Omega)$ bir $\mathbb{R}$ vektör uzayı ve $\int_{\Omega} : \mathcal{R}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ bir doğrusal dönüşümdür.

(ii) $f, g \in \mathcal{R}(\Omega) \implies |f|, f^+, f^-, f^2, fg, \max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{R}(\Omega)^{12}$.
Eğer ayrıca bir $\delta > 0$ ile daima $f(x) \geq \delta$ ise $1/f \in \mathcal{R}(\Omega)$.

Kanıt. (i) Her $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için

$$R(\alpha f + \beta g, \mathcal{Z}(a)) = \alpha R(f, \mathcal{Z}(a)) + \beta R(g, \mathcal{Z}(a)).$$

Sav buradan Limit Kuralları (1.1.7) ile çıkar.

(ii) $\phi(y) := |y|, y^+, y^-$ Lipschitz fonksiyonudurlar. $\phi(y) = y^2$ sınırlı aralıklarda ve $\phi(y) = 1/y$ ise $|y| \geq \delta$ da Lipschitz süreklidirler. Dolayısıyla Önsav 2.3.17 ile $\phi \circ f = |f|, f^+, f^-, f^2 \in \mathcal{R}(I)$ ve koşulumuzda $1/f \in \mathcal{R}(I)$ olur. Ayrıca

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2], \max(f, g) = f + (g-f)^+, \min(f, g) = f - (f-g)^+$$

olduğundan $fg, \max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{R}(I)$ olur. ■

Teorem 2.3.19 (Hacim ve İntegral İlişkisi) $f : \Omega \rightarrow [0, M]$ sınırlı fonksiyonun Riemann integrallenebilir olması için gvyk $[0, f]$ 'nin Jordan ölçülebilir olmasıdır ve bu durumda $\int_{\Omega} f = j_{n+1}([0, f])$.

Kanıt. (1) f Riemann integrallenebilirse (2.50) ve (2.51)'den $[0, f]$ Jordan ölçülebilir ve $\int_{\Omega} f = j_{n+1}([0, f])$.

¹² $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$.

(2) Şimdi $M := [0, f]$ kümesi Jordan ölçülebilir ve $\alpha := j_{n+1}(M)$ olsun. $M_{[k]}$ ve $M^{[k]}$ kümeleri M 'nin küpsel yaklaşımları olsunlar. $M^{[k]}$ 'ye düşen bir Q^{n+1} küpü $\Omega^{[k]}$ 'ye düşen bir Q^n küpü ile $Q^{n+1} = Q^n \times I$ tipindedir; burada I , uzunluğu 2^{-k} olan uygun bir aralıktır. Bu Q^n küpleri $\Omega^{[k]}$ 'yi oluştururken bunların Ω 'ya düşenleri $\Omega_{[k]}$ 'yi oluşturur. $\Omega^{[k]}$ 'deki herhangi iki küp ya ayrıktır, ya da bir ortak yüzeye sahiptirler. Ortak yüzeyleri varsa bunu bir küpte bırakıp diğerinden alarak $\Omega_a^{[k]}, \Omega_{[k]}^a$ ayrık küpler ailelerini oluşturalım. $\mathcal{Z}_k := \Omega \cap \Omega_a^{[k]}$ ailesi Ω 'nın bir parçasıdır. $\Omega_{[k]}^a \subset \mathcal{Z}_k \subset \Omega_a^{[k]}$ olduğundan

$$j_{n+1}(\Omega_{[k]}^a) \leq j_{n+1}(s_f \mathcal{Z}_k) \leq j_{n+1}(S_f \mathcal{Z}_k) \leq j_{n+1}(\Omega_a^{[k]}) \quad (2.64)$$

olur. Savımız Önerme 2.2.10, (2.64), (2.49), Sandviç Teoremi ve Önerme 2.3.7'den çıkar. ■

Teoreminizden ve $[0, f] = [0, f] \sqcup G_f$ bağıntısından aşağıdaki önerme çıkar:

$$\exists \int_{\Omega} f = \alpha \iff [0, f], [0, f] \in \mathcal{J}^{n+1} \text{ ve } j_{n+1}([f, 0]) = j_{n+1}([0, f]) = \alpha. \quad (2.65)$$

Sonuç 2.3.20 (i) $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ ise G_f sıfır hacimlidir ve

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f^+ - \int_{\Omega} f^- = j_{n+1}([0, f]) - j_{n+1}([0, f^-]) \quad (2.66)$$

$$= j_{n+1}([0, f]) - j_{n+1}([f, 0]). \quad (2.67)$$

(ii) $f, g \in \mathcal{R}(I)$ ve $f \leq g$ ise $[f, g]$ Jordan ölçülebilir ve

$$j_{n+1}([f, g]) = \int_{\Omega} (g - f) = \int_{\Omega} g - \int_{\Omega} f. \quad (2.68)$$

Kanıt. (i) $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ ise $f^+, f^- \in \mathcal{R}(\Omega)$. Teorem 2.3.19'dan dolayı $G_{f^{\pm}}$ sıfır hacimli, $G_f \subset G_{f^+} \cup G_{f^-}$ olduğu için G_f sıfır hacimlidir.

$[f, 0]$ tam da, $[0, f^-]$ kümesinin $\mathbb{H}^n := \mathbb{R}^n \times \{0\}$ hiperdüzleminde yansıtılmasıyla elde edilen kümedir. Bunlardan biri Jordan ölçülebilirse, diğeri de Jordan ölçülebilir ve ölçüleri birbirine eşittir. Dolayısıyla Sonuç 2.3.18 (1), (2) ve Teorem 2.3.19 ile

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f^+ - \int_{\Omega} f^- = j_{n+1}([0, f]) - j_{n+1}([0, f^-]) = j_{n+1}([0, f]) - j_{n+1}([f, 0]).$$

(ii) Her $c \in \mathbb{R}$ için $j_{n+1}([f, g]) = j_{n+1}([f + c, g + c])$ olduğundan gbk $0 < f \leq g$ varsayabiliriz. $[f, g] = ([0, g] \setminus [0, f]) \sqcup G_f$ olduğundan Teorem 2.3.19 ile

$$\begin{aligned} j_{n+1}([f, g]) &= j_{n+1}([0, g]) - j_{n+1}([0, f]) + j_{n+1}(G_f) \\ &= j_{n+1}([0, g]) - j_{n+1}([0, f]) = \int_{\Omega} g - \int_{\Omega} f. \end{aligned}$$

■

(2.66)'dan şunu da öğrenmiş oluyoruz: $\int_{\Omega}$ integrali $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ hiper düzleminin üstündeki hacimleri pozitif, altındakileri ise negatif ölçer.

İntegral alma yöntemlerini öğrendiğimizde, Teorem 2.3.19 ve Sonuç 2.3.20 bize bazı bölgelerin hacimlerini hesaplama fırsatı verecektir.

Her $x \in \Omega$ için $-x \in \Omega$, ayrıca $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ ve her $x \in \Omega$ için $f(-x) = -f(x)$ ise, daha fazla bilgiye gerek duymadan, $\int_{\Omega} f = 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin $\sin$ fonksiyonu $I := [-a, a]$ aralığında düzgün sürekli olduğundan Riemann integrallenebilir ve her $x \in I$ için $-x \in I$ ve $\sin(-x) = -\sin x$ olduğundan $\int_I \sin = 0$.

Lemma 2.3.21 $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonu Jordan ölçülebilir $\mathring{\Omega}, \Omega, \bar{\Omega}$ kümelerinden biri üzerinden Riemann integrallenebilirse her üçünde de Riemann integrallenebilir ve bu durumda

$$\int_{\mathring{\Omega}} f = \int_{\Omega} f = \int_{\bar{\Omega}} f.$$

Kanıt. $\mathring{\Omega}, \Omega, \bar{\Omega}$ kümelerinden biri Jordan ölçülebilirse, diğerleri de Jordan ölçülebilir. $S := \Omega \setminus \mathring{\Omega} \subset \partial\Omega$ olsun; $S = \partial\Omega$, dd $\Omega = \bar{\Omega}$ olabilir. $\mathcal{Z} = \{A_i\} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için $\mathring{\mathcal{Z}} := \{A_i \cap \mathring{\Omega}\} \in \mathfrak{Z}(\mathring{\Omega})$ ve $\mathcal{Z}_S := \{A_i \cap S\} \in \mathfrak{Z}(S)$ ise $\mathcal{Z}^* = \mathring{\mathcal{Z}} \cup \mathcal{Z}_S$ olmak üzere $\text{Sl}(f|\mathring{\Omega}, \mathring{\mathcal{Z}}) = \text{Sl}(f, \mathcal{Z}^*)$ olur. ε -Ölçütü'nden dolayı $f|_{\mathring{\Omega}}$ 'nın Riemann integrallenebilir olması f 'nin integrallenebilir olmasına denktir.

$f \in \mathcal{R}(\mathring{\Omega})$ ve $\alpha := \int_{\mathring{\Omega}} f$ olsun; $\Omega = \bar{\Omega}$ olabilir. Önsav 2.3.7'den dolayı bir $(\mathring{\mathcal{Z}}_k) \subset \mathfrak{Z}(\Omega)$ dizisi $\alpha = \lim_k A(f, \mathring{\mathcal{Z}}_k) = \lim_k U(f, \mathring{\mathcal{Z}}_k)$ olacak biçimde vardır. $\mathcal{Z}_S \in \mathfrak{Z}(S)$ sabit seçilsin ve $\mathcal{Z}_k := \mathring{\mathcal{Z}}_k \cup \mathcal{Z}_S$ olsun. Şimdi $\mathcal{Z}_k \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ ve $A(f, \mathring{\mathcal{Z}}_k) = A(f, \mathcal{Z}_k)$ ve $U(f, \mathring{\mathcal{Z}}_k) = U(f, \mathcal{Z}_k)$ olduğundan $\lim_k A(f, \mathcal{Z}_k) = \lim_k U(f, \mathcal{Z}_k) = \alpha$ olur. Önsav 2.3.7'den $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ ve $\int_{\Omega} f = \alpha$. ■

Önerme 2.3.22 (i) $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, $A \subset \Omega$ ve $A \in \mathcal{J}^n$ ise $f|_A \in \mathcal{R}(A)$.

(ii) $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$ ve $f \leq g$ ise $\int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} g$ (**monotonluk**).

(iii) $\mathcal{Z} = \{A_1, \dots, A_m\} \in \mathfrak{Z}_g(\Omega)$ ve $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı olsun.

$$f \in \mathcal{R}(\Omega) \iff f|_{A_i} \in \mathcal{R}(A_i) \quad i = 1, \dots, m \text{ ve } f \in \mathcal{R}(\Omega) \text{ ise}$$

$$\int_{\Omega} f = \int_{A_1} f|_{A_1} + \dots + \int_{A_m} f|_{A_m}. \text{ (toplamsallık)}$$

Kanıt. (i) $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. ε -Ölçütü'nden bir $\mathcal{Z} = \{A_i\} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ parçalanışını $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < \varepsilon$ olacak biçimde seçebiliriz. $\mathcal{Z}^* = \{A_i \cap A\} \in \mathfrak{Z}(A)$ ve $\text{Sl}(f|_A, \mathcal{Z}^*) \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < \varepsilon$ olur. ε -Ölçütü ile $f|_A \in \mathcal{R}(A)$.

(ii) $\forall \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega) \quad A(f, \mathcal{Z}) \leq A(g, \mathcal{Z}) \implies \int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} g = \int_{\Omega} g$.

(iii) Savımızı $m = 2$ için kanıtlamak yeterlidir; gerisi tümevarımdır.

(iii)(1) $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ ve $\{A_1, A_2\} \in \mathfrak{Z}_g(\Omega)$ ise önermemizin birinci kısmından $f|_{A_i} \in \mathcal{R}(A_i)$ olduğunu biliyoruz.

(iii)(2) Şimdi $A_1, A_2 \subset \Omega$ Jordan ölçülebilir $\mathring{A}_1 \cap \mathring{A}_2 = \emptyset$ ve $f|_{A_i} \in \mathcal{R}(A_i)$, $i = 1, 2$ olsun. $A_{12} := A_1 \cap A_2$ olmak üzere $A_{12} \subset \partial A_1 \cap \partial A_2$ olduğundan A_{12} sıfır hacimlidir. $A'_1 := A_1 \setminus A_{12} \in \mathcal{J}^n$ ve $A'_2 := A_2 \setminus A_{12} \in \mathcal{J}^n$ olmak üzere $A_1 \cup A_2 = A'_1 \sqcup A'_2 \sqcup A_{12}$ olur. Önermemizin (i) kısmından $f|_{A'_i} \in \mathcal{R}(A'_i)$ ve $\int_{A'_i} f|_{A'_i} = \int_{A_i} f|_{A_i}$. Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\mathcal{Z}'_i \in \mathfrak{Z}(A'_i)$ parçalanışlarını $\text{Sl}(f|_{A_i}, \mathcal{Z}'_i) < \varepsilon/2$ olarak seçebiliriz. O zaman $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}'_1 \cup \mathcal{Z}'_2 \cup \{A_{12}\} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < 2\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ olur. Dolayısıyla $f \in \mathcal{R}(\Omega)$.

(1) ve (2)'den dolayı $f \in \mathcal{R}(\Omega) \iff f|_{A_i} \in \mathcal{R}(A_i)$, $i = 1, 2$. Şimdi $\mathcal{Z}'_{ik} \in \mathfrak{Z}(A_i)$ ve $\mathcal{Z}_{12k} \in \mathfrak{Z}(A_{12})$ parçalanışlarını, $\|\mathcal{Z}'_{ik}\| \rightarrow 0$ ve $\|\mathcal{Z}_{12k}\| \rightarrow 0$ olacak biçimde seçelim. $\mathcal{Z}_k := \mathcal{Z}'_{1k} \sqcup \mathcal{Z}'_{2k} \sqcup \mathcal{Z}_{12k}$ olmak üzere $\|\mathcal{Z}_k\| \rightarrow 0$ olur. $j_n(A_{12}) = 0$ olduğundan $R(f, \mathcal{Z}_k(a_k)) = \sum_{i=1}^2 R(f|_{A_i}, \mathcal{Z}'_{ik}(a_{ik}))$ olur. Sonuçta

$$\int_{\Omega} f = \lim_{k \rightarrow +\infty} R(f, \mathcal{Z}_k(a_k)) = \sum_{i=1}^2 \lim_{k \rightarrow +\infty} R(f|_{A_i}, \mathcal{Z}'_{ik}(a_{ik})) = \sum_{i=1}^2 \int_{A_i} f|_{A_i}.$$

■

Teorem 2.3.23 (Yaklaşım) $A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $B_k \subset A$ Jordan ölçülebilir ve $\lim_k \bar{j}_n(A \setminus B_k) = 0$ ise A Jordan ölçülebilir ve

$$\int_{\underline{A}} f = \lim_k \int_{\underline{B_k}} f \text{ ve } \int_{\overline{A}} f = \lim_k \int_{\overline{B_k}} f.$$

Özellikle her k için $f \in \mathcal{R}(B_k)$ ise $f \in \mathcal{R}(A)$ ve $\int_A f = \lim_k \int_{B_k} f$.

Kanıt. 2.2.16'dan dolayı A Jordan ölçülebilir. Açıkça $\int_{\underline{A}} f = \int_{\underline{B_k}} f + \int_{\underline{A \setminus B_k}} f$. Diğer yandan $\|f\|_A \leq M$ ise $\left| \int_{\underline{A \setminus B_k}} f \right| \leq M j_n(A \setminus B_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ olduğundan

$\int_{\underline{A}} f = \lim_k \int_{\underline{B}_k} f$ olur. $\overline{\int}$ için sav benzer biçimde kanıtlanır ve işimiz biter. ■

Not 2.3.24 Bir kapalı Q kutusunu Ω sınırlı kümesini içerecek biçimde seçelim ve

$$f_Q(x) := \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in Q \setminus \Omega \end{cases}$$

olsun. Önerme 2.3.22 (2)'den dolayı $f_Q \in \mathcal{R}(Q) \iff f_Q|_{\Omega} \in \mathcal{R}(\Omega)$ ve $f_Q|(Q \setminus \Omega) \in \mathcal{R}(Q \setminus \Omega)$ olur. $Q \setminus \Omega$ Jordan ölçülebilir ve orada f_Q Riemann integrallenebilir ve $\int_{Q \setminus \Omega} f_Q = 0$ olduğundan Önerme 2.3.22 (3) ile

$$f \in \mathcal{R}(\Omega) \iff f_Q \in \mathcal{R}(Q) \text{ ve } f \in \mathcal{R}(\Omega) \text{ ise } \int_{\Omega} f = \int_Q f_Q. \quad (2.69)$$

Bu bağıntı Q 'nın seçiminden bağımsızdır. Bu nedenle çoğu yazar önce Q kapalı kutularında integrali tanımlar, ardından $\int_{\Omega} f$ integralini $\int_Q f_Q$ olarak tanımlar. Her iki yaklaşım örtüşür.

$$\mathbf{1}_{\Omega}(x) := \begin{cases} 1 & , x \in \Omega \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

fonksiyonuna Ω 'nın **özgün** (karakteristik) **fonksiyonu** denir. $\Omega \subset A$ ve A Jordan ölçülebilirse

$$\int_A \mathbf{1}_{\Omega} = j_n(\Omega).$$

▲

$[0, \mathbf{1}_{\Omega}] = \Omega \times [0, 1]$ Jordan ölçülebilir, $\mathbf{1}_{\Omega} \in \mathcal{R}(\Omega)$ ve

$$\int_{\Omega} \mathbf{1}_{\Omega} = j_{n+1}(\Omega \times [0, 1]) = j_n(\Omega) \cdot j_1([0, 1]) = j_n(\Omega). \quad (2.70)$$

Konuya Jordan ölçülebilir kümelerle değil de integrallerle başlanıldığında, $\mathbf{1}_{\Omega}$ Riemann integrallenebilir ise Ω Jordan ölçülebilir denir ve ölçüsü (2.70) ile açıklanır.

Önerme 2.3.25 $f, p \in \mathcal{R}(\Omega)$, $p \geq 0$ ve $f : \Omega \rightarrow [m, M]$ ise

- (i) $m j_n(\Omega) \leq \int_{\Omega} f \leq M j_n(\Omega)$.
- (ii) $m \int_{\Omega} p \leq \int_{\Omega} p f \leq M \int_{\Omega} p$.
- (iii) $|\int_{\Omega} f| \leq \int_{\Omega} |f| \leq \|f\|_{\Omega} j_n(\Omega)$.

Kanıt. (i) ve (ii) monotonluktan çıkar (bkz. 2.3.22 (ii)). $\pm f \leq |f|$ olduğundan, yine monotonluk (iii)'ü verir. ■

Teorem 2.3.26 (Aradeğer Teoremi) $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, $m = \inf_{\Omega} f$ ve $M = \sup_{\Omega} f$ olmak üzere bir $\mu \in [m, M]$ ile

$$\int_{\Omega} f = \mu j_n(\Omega). \quad (2.71)$$

Eğer ayrıca Ω kompakt, bağlantılı ve f sürekli ise bir $\xi \in \Omega$ ile $\int_{\Omega} f = f(\xi)j_n(\Omega)$.

Kanıt. Önerme 2.3.25 (1)'den bir $\mu \in [m, M]$ ile $\int_{\Omega} f = \mu j_n(\Omega)$ olur. Ω kompakt ve f sürekli ise $a, b \in \Omega$ noktaları $f(a) = m$ ve $f(b) = M$ olacak biçimde seçilebilirler. Ω bağlantılı ise bir $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ gezisi $\gamma(0) = a$ ve $\gamma(1) = b$ olacak biçimde seçilebilir. Aradeğer Teoreminden $f \circ \gamma$ fonksiyonu μ değerini bir t_0 noktasında alır; bu durumda $\xi := \gamma(t_0)$ için $\mu = f(\xi)$ olur. ■

Önerme 2.3.27 (Schwarz Eşitsizliği) Her $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$ için

$$\left| \int_{\Omega} fg \right|^2 \leq \int_{\Omega} f^2 \cdot \int_{\Omega} g^2.$$

Kanıt. Her $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$ için $\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} fg$ ile $\mathcal{R}(\Omega)$ vektör uzayında bir iç çarpım açıklanır. Savımız bu iç çarpıma ilişkin Schwarz eşitsizliğidir. ■

Teorem 2.3.28 $(f_k) \subset \mathcal{R}(\Omega)$ ve $f_k \xrightarrow{\Omega} f$ ise $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ ve $\int_{\Omega} f = \lim \int_{\Omega} f_k$.

Kanıt. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Bu durumda bir $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ ile her $k \geq n_{\varepsilon}$ için $\|f_k - f\| < \varepsilon$, dd

$$\forall x \in \Omega \quad \forall k \geq n_{\varepsilon} \quad (f_k(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_k(x) + \varepsilon).$$

Buradan her $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ ve her $k \geq n_{\varepsilon}$ için

$$A(f_k, \mathcal{Z}) - \varepsilon j_n(\Omega) \leq A(f, \mathcal{Z}) \leq A(f_k, \mathcal{Z}) + \varepsilon j_n(\Omega)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $k \geq n_{\varepsilon}$ için, $\int_{\underline{\Omega}} f_k = \overline{\int}_{\Omega} f_k = \int_{\Omega} f_k$ olduğunu da gözetirsek

$$\int_{\Omega} f_k - \varepsilon j_n(\Omega) \leq \int_{\underline{\Omega}} f \leq \int_{\Omega} f_k + \varepsilon j_n(\Omega),$$

dd her $k \geq n_{\varepsilon}$ için $\left| \int_{\Omega} f_k - \int_{\underline{\Omega}} f \right| < \varepsilon j_n(\Omega)$ olur. Böylece $\lim \int_{\Omega} f_k = \int_{\underline{\Omega}} f$. Benzer biçimde $\lim \int_{\Omega} f_k = \overline{\int}_{\Omega}$ kanıtlanır ve bu savı verir. ■

Sonuç 2.3.29 $(f_k) \subset \mathcal{R}(\Omega)$ ve $\sum_{k \geq 0} f_k \xrightarrow{\Omega} f$ ise $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ ve $\int_{\Omega} f = \sum_{k \geq 0} \int_{\Omega} f_k$.

2.4 Lebesgue Ölçütü

Uzlaşma: Yine bu kısımda da $\Omega \in \mathcal{J}^n$ ve $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı olacaktır.

$p > 0$ olsun. “ f , x 'te sürekli $\iff \text{sl}(f, x) = 0$ ” olduğunu biliyoruz.

$$S \equiv S_f := \{x \in \Omega \mid f, x \text{ te sürekli} \} \text{ ve} \\ \Omega_p \equiv \Omega_{f,p} := \{x \in \Omega \mid \text{sl}(f, x) \geq p\}$$

olmak üzere $S_f = \bigcup_{p>0} \Omega_{f,p} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_{f,1/n}$.

Sonuç 2.3.8'de Ω 'daki her sınırlı ve düzgün sürekli f 'nin Riemann integrallenebilir olduğunu öğrendik. Örnek 2.3.16 (2)'de ise Riemann integrallenemeyen bir fonksiyon tanıdık; bu fonksiyon için S_f 'nin hacmi pozitifdir. Örnek 2.3.16(3)'te sayılabilir sonsuz noktada sürekli, yine de Riemann integralenebilir bir fonksiyon tanıdık. Bu fonksiyon için S_f , yakınsak bir dizinin noktaları olarak, sıfır hacimlidir. Örnek 2.3.16 (4)'te ise $I = (0, 1)$ aralığında tanımlı, irrasyonel noktalarda sürekli, rasyonel noktalarda sürekli, Riemann integrallenebilir bir f fonksiyonu tanıdık. Bu kez S_f sıfır hacimli değildir; ancak her $n \in \mathbb{N}^*$ için (sonlu noktadan oluşan) $S_{1/n}$ sıfır hacimli ve $S_f = \bigcup_{n \geq 1} S_{1/n}$. Yani S_f , sayılabilir çoklukta sıfır hacimli kümenin birleşimidir. İyi de, tam olarak hangi $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları Riemann integrallenebilir? Örneklerimizden S_f ve $\Omega_{f,p}$ 'lerin bir biçimde işe karışacağını seziyoruz. Buradan ilerleyeceğiz. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için $Q_r[x] := \prod_{i=1}^n [x_i - r, x_i + r]$ olsun.

Lemma 2.4.1 $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ve bir $\varepsilon > 0$ ile her $x \in K$ için $\text{sl}(f, x) < \varepsilon$ olsun. Bir $\delta > 0$ sayısı, her $x \in K$ için $\text{Sl}(f, K \cap Q_\delta[x]) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. Her $x \in K$ için $Q_{2\delta_x}[x]$ kutusunu $\text{Sl}(f, K \cap Q_{2\delta_x}[x]) < \varepsilon$ olacak biçimde seçebiliriz. $\{\dot{Q}_{\delta_x}[x]\}_{x \in K}$ ailesi K 'nin bir açık örtüsüdür. K kompakt olduğundan, bunlardan sonlu tanesi ile, diyelim ki $\dot{Q}_{\delta_{x_1}}[x_1], \dots, \dot{Q}_{\delta_{x_m}}[x_m]$ ile K 'yi örtebiliriz. $\delta = \min_{1 \leq i \leq m} \delta_{x_i}$ işimizi görür. ■

Teorem 2.4.2 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı olsun. $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ olması için gvyk her $p > 0$ için $\Omega_p := \{x \in \Omega \mid \text{sl}(f, x) \geq p\}$ 'nin sıfır hacimli olmasıdır.

Kanıt. Önsav 2.3.21'den dolayı Ω 'yı kompakt alabiliriz.

(1) Her $p > 0$ için Ω_p sıfır hacimli olsun. $f \equiv 0$ ise $f \in \mathcal{R}(\Omega)$. Dolayısıyla $f \not\equiv 0$ ve $M := \sup_{x \in \Omega} |f(x)| > 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Bir $p > 0$ sayısını $0 < p < \varepsilon/(1 + j_n(\Omega))$ olacak biçimde seçelim. Varsayımdan dolayı

Ω_p sıfır hacimlidir. Dolayısıyla $Q_1, \dots, Q_k$ açık kutuları

$$\Omega_p \subset \bigcup_{i=1}^k Q_i \text{ ve } \sum_{i=1}^k v_n(Q_i) < \frac{p}{2M} \quad (2.72)$$

olacak biçimde seçilebilir. Şimdi $K := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k Q_i$ Jordan ölçülebilir bir kompakt kümedir ve her $x \in K$ için $\text{sl}(f, x) < p$. Önsav 2.4.1 ile K 'yi sonlu sayıda $Q'_1, \dots, Q'_m$ kutularıyla, daima $\text{Sl}(f, K \cap Q'_i) < p$ olacak biçimde, örtebiliriz. $F' := \bigcup_{i=1}^m Q'_i$ figürünü ayırık $Q''_1, \dots, Q''_l$ kutularının, $\text{Sl}(f, K \cap Q''_i) < p$ olacak biçimde, birleşimi olarak yazabiliriz. Dolayısıyla $A_i := Q''_i \cap K$ olmak üzere $\mathcal{Z} = \{A_1, \dots, A_l\}$, K 'nin bir parçalanışdır ve hep $\text{Sl}(A_i) < p$. $\mathcal{Z}$ 'yi bir biçimde bir $\mathcal{Z}' = \mathcal{Z} \cup \{A_{l+1}, \dots, A_r\} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ parçalanışına tamamlayalım. Bu durumda $\mathcal{A} = \{A_{l+1}, \dots, A_r\}$ olmak üzere, $\text{Sl}(f, Q_i) \leq 2M$ ve (2.72) ile

$$\begin{aligned} \text{Sl}(f, \mathcal{Z}') &= \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) + \text{Sl}(f, \mathcal{A}) \leq pj_n(K) + \sum_{j=l+1}^r \text{Sl}(f, A_j)j_n(A_j) \\ &\leq pj_n(\Omega) + \sum_{i=1}^k 2Mj_n(Q_i) \leq pj_n(\Omega) + 2M \frac{p}{2M} = p(1 + j_n(\Omega)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

ε -Ölçtü ile $f \in \mathcal{R}(\Omega)$.

(2) Şimdi bir $p > 0$ için Ω_p sıfır hacimli olmasın. Bu durumda bir $\delta > 0$ sayısı, $\Omega_p \subset F \in \mathfrak{F}^n$ koşulunu sağlayan her F figürü için $v_n(F) > \delta$ olacak biçimde vardır. Özellikle her $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ parçalanışı için $\Omega = \bigcup \mathcal{Z}$ olduğundan $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) \geq p\delta > 0$ olur. ε sayısı $0 < \varepsilon < p\delta$ olarak seçilirse her $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) > \varepsilon$ olur. ε -Ölçtü ile $f \notin \mathcal{R}(\Omega)$. ■

Sonuç 2.4.3 f 'nin Riemann integrallenebilir olması için gvyk S_f 'nin sayılabilir çoklukta sıfır hacimli kümelerinin birleşimi olmasıdır.

Kanıt. Sav $S_f = \bigcup_{p>0} \Omega_{f,p} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_{f,1/n}$ eşitliğinden çıkar. ■

Tanım 2.4.4 $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık sayılabilir çoklukta $Q_1, Q_2 \dots$ kutuları $A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q_i$ ve $\sum_{i=1}^{+\infty} v_n(Q_i) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabiliyorsa A 'ya bir **sıfır kümesidir** denir.

Kimi yazar bu tanımlarda Q_k kutularının açık olmalarını, kimi yazarlar ise kapalı olmalarını ister. Ancak bu yaklaşımlar bizimkine denktir. Örneğin tanımda kutuların açık olmasını istemişseniz, $v_n(\overset{\circ}{Q}_k) = v_n(Q) = v_n(Q_k)$ olduğundan, herhangi türden bir kutu veya kapalı kutu da kullanabilirsiniz. Geriye kapalı kutulardan açık kutulara geçilebileceğini göstermek kalıyor. $\varepsilon > 0$ verilsin ve biz sayılabilir çoklukta $Q_1, Q_2 \dots$ kapalı kutularını $A \subset$

$\bigcup_{i=1}^{+\infty} Q_i$ ve $\sum_{i=1}^{+\infty} v_n(Q_i) < \varepsilon/2$ olacak biçimde seçelim. Her bir Q_n kutusunu, hacim artışı $\varepsilon/2^{n+1}$ 'i geçmeyecek biçimde bir P_n açık kutusuna genişletelim. Belli ki $A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} P_i$ ve $\sum_{i=1}^{+\infty} v_n(P_i) < \varepsilon$ olur.

$\emptyset$ de bir açık kutu olduğundan *her sıfır hacimli küme bir sıfır kümesidir. Sıfır kümelerinin altkümeleri de sıfır kümeleridir.* $X \subset \mathbb{R}$ ve $\varphi(x)$ ise X 'in noktalarına ilişkin bir önerme olsun. $\{x \in X \mid \neg\varphi(x)\}$, dd φ 'nin doğru olmadığı noktaların kümesi bir sıfır kümesi ise φ , X 'te **hemen her yerde** geçerlidir denir; bunu kısaca “ X 'te hhy φ ” ile göstereceğiz.

Lemma 2.4.5 (i) $\mathbb{R}^n$ 'de sıfır hacimli kümelerinin bir $(S_n)_{n \geq 1}$ dizisi için $S = \bigcup_{n \geq 1} S_n$ kompaktsa, S de sıfır hacimlidir.

(ii) Sıfır kümesi olan kompakt $K \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri sıfır hacimlidir.

Kanıt. (i) $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Her S_i kümesini $\sum_{j=1}^{m_i} v_n(Q_{i,j}) < \varepsilon/2^i$ koşulunu sağlayan $Q_{i,j}$ açık kutularıyla örtebiliriz. Tüm bu kutular S kompakt kümesinin bir açık örtüsünü oluşturur. S kompakt olduğundan bu kutuların sonlu tanesi S 'yi örter ve bunların hacimleri toplamı belli ki ε 'dan küçüktür. Sonuçta S sıfır hacimlidir.

(ii) $K \subset \mathbb{R}^n$ bir kompakt sıfır kümesi olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. K 'yi sayılabilir $Q_1, Q_2, \dots$ açık kutularıyla, $\sum_{i=1}^n v_n(Q_i) < \varepsilon$ olacak biçimde örtebiliriz. K kompakt olduğundan bunlardan sonlu tanesi, onlara $Q_{i_1}, \dots, Q_{i_m}$ diyelim, K 'yi örter ve belli ki $\sum_{j=1}^m v_n(Q_{i_j}) < \varepsilon$. Öyleyse K sıfır hacimlidir. ■

Önerme 2.4.6 Sayılabilir çoklukta sıfır kümelerinin birleşimi de sıfır kümesidir.

Kanıt. $S_1, S_2, \dots$ sıfır kümeleri ve $S = \bigcup_{i \geq 1} S_i$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Her bir S_i 'yi sayılabilir çoklukta $Q_{i,1}, Q_{i,2}, \dots$ açık kutularıyla $\sum_{j \geq 1} v_n(Q_{i,j}) < \varepsilon/2^i$ olacak biçimde örtebiliriz. Sonunda sayılabilir çoklukta $\{Q_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}^*}$ açık kutularımızla S 'yi örtebiliriz ve

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}^*} v_n(Q_{i,j}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} v_n(Q_{i,j}) \right) < \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon.$$

Böylece S bir sıfır kümesidir. ■

Not 2.4.7 Her $a \in \mathbb{R}^n$ için $\{a\}$ bir sıfır kümesi olduğundan her sayılabilir $A \subset \mathbb{R}^n$ bir sıfır kümesidir; özellikle sayılabilir $\mathbb{Q}^n$ bir sıfır kümesidir. Ancak $\mathbb{Q}^n$ aynı zamanda $\mathbb{R}^n$ 'de yoğundur. Dolayısıyla sayılabilir çoklukta bozulmamış $Q_1, Q_2, \dots$ kutularıyla $\mathbb{Q}^n$ 'i örtersek, geometrinin de, sezginin de, sağduyunun da söylediği $\sum_{i=1}^{+\infty} v_n(Q_i) = +\infty$ olacağıdır. Gel gör ki aritmetik her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bu kutuları $\sum_{i=1}^{+\infty} v_n(Q_i) < \varepsilon$ olacak biçimde seçebileceğimizi söylüyor!

$\mathbb{R}$ 'de sayılamaz bir sıfır kümesi var mıdır? Evet, örneğin C Cantor kümesi. $I = [0, 1]$ birim aralığı olsun. I aralığını üç eşit uzunluklu $[1, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, $[2/3, 1]$ kapalı aralıklarına bölelim. I 'dan ortadaki $(1/3, 2/3)$ açık aralığını attıktan sonra geriye kalan kompakt kümeyi C_1 ile gösterelim. Geriye kalan $[1, 1/3]$ ve $[2/3, 1]$ kapalı aralıklarıyla aynı işlemi yaparak C_2 kompakt kümesi elde edilir ve $C_2 \subset C_1$. Bu işlem sürdürülerek her $n \in \mathbb{N}^*$ için C_n kompakt kümeleri $I \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$ olacak biçimde elde edilir. $C := \bigcap C_n$ 'ye **Cantor kümesi** denir. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. n doğal sayısını $2^n/3^n < \varepsilon$ olacak biçimde seçelim. C_n her birinin uzunluğu $1/3^n$ olan 2^n ayrık $I_1, \dots, I_{2^n}$ kapalı aralığının birleşimidir. $C \subset C_n = \bigsqcup_{i=1}^{2^n} I_i$ ve $\sum v_1(I_i) < \varepsilon$. Öyleyse C , $\mathbb{R}$ 'de bir sıfır kümesidir. ▲

Teorem 2.4.8 (Lebesgue Ölçütü) $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul, f 'nin Ω 'da hhy sürekli olmasıdır.

Kanıt. (1) $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ olsun. Sonuç 2.4.3'ten dolayı S_f sayılabilir çoklukta sıfır hacimli kümenin birleşimidir. Sıfır hacimli kümeler sıfır kümeleri olduğundan Önerme 2.4.6 ile S_f sıfır kümesidir.

(2) Önsav 2.3.21'den dolayı Ω 'yı kompakt alabiliriz. S_f sıfır kümesi ise her $p > 0$ için $\Omega_{f,p} = \{x \in I \mid |f(x)| \geq p\}$ de bir sıfır kümesidir. $\Omega_{f,p}$ bir kompakt kümenin kapalı altkümeleri olarak kompakttır. Önsav 2.4.5 (ii)'den dolayı $\Omega_{f,p}$ sıfır hacimlidir. Teorem 2.4.2'den $f \in \mathcal{R}(\Omega)$. ■

Uyarı. “ f fonksiyonu Ω 'da hhy sürekli” ve “ f fonksiyonu, Ω 'da sürekli bir g fonksiyonuna hhy eşittir” farklı kavramlardır. Örneğin $\Omega = [0, 1]$ ve $A = \Omega \cap \mathbb{Q}$ olmak üzere $f = \mathbf{1}_A$ ve $g \equiv 0$ olsun. g sürekli ve hhy $f = g$. Ancak f fonksiyonu her $x \in \Omega$ noktasında süreksizdir!

Lebesgue ölçütü çok güçlüdür. Şimdiye kadar kanıtladığımız savların her biri neredeyse tek bir cümleyle bu ölçütten kazanılır. Örneğin her sürekli sınırlı fonksiyon integrallenebilir. Monoton $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları Riemann integrallenebilir, çünkü S_f sayılabilir bir kümedir. Örneğin $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$ ise $S_{\alpha f + \beta g}, S_{fg} \subset S_f \cup S_g$ olduğundan $\alpha f + \beta g, fg \in \mathcal{R}(\Omega)$ vs.... Okura daha önce kanıtlanan teoremleri bir kez de Lebesgue Ölçütü ile gözden geçirmelerini öneririz. Bunlara bir kaç sonuç daha ekleyelim.

Sonuç 2.4.9 $f : \Omega \rightarrow [a, b]$ Riemann integrallenebilir ve $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ise $g \circ f$ Riemann integrallenebilir.

Kanıt. $g \circ f$ sınırlı ve $S_{g \circ f} \subset S_f$. Bu ve Lebesgue Ölçütü savı verir. ■

Sonuç 2.4.10 $f : \Omega \rightarrow [0, M]$ Riemann integrallenebilir ve $\int_{\Omega} f = 0$ ise f fonksiyonu hhy sıfırdır.

Kanıt. f hhy sürekli. $a \in \Omega$, $f(a) = p > 0$ ve f 'nin a 'da sürekli olduğunu varsayalım. Bozulmamış bir Q kutusunu her $x \in Q$ için $f(x) \geq p/2$ olacak biçimde seçelim. $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $g|_Q \equiv p/2$ ve $g|(\Omega \setminus Q) \equiv 0$ olarak açıklansın. $g \in \mathcal{R}(\Omega)$ ve $0 \leq g \leq f$ olduğundan, monotonluktan $0 < p v_n(Q)/2 = \int_{\Omega} g \leq \int_{\Omega} f$. Bu hipotezimizle çelişir. Dolayısıyla f fonksiyonu sürekli olduğu her noktada 0 değerini alır. ■

Örnek 2.4.11. (1) $I = [0, 1]$ ve $n \in \mathbb{N}^*$ için

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ n, & 0 < x < 1/n \\ 0, & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olsun. Her $x \in I$ için $\exists \lim f_n(x) = 0 =: f(x)$. Her f_n bir merdiven fonksiyonudur, Riemann integrallenebilir, $\int_I f_n = 1$ ve $\int_I f = 0$. Dolayısıyla $\lim \int_I f_n \neq \int_I \lim f_n$. Eşitlik için ek koşullar gereklidir (bkz. Teorem 2.4.12). Bu Riemann integralinin hoş olmayan bir özelliğidir.

(2) $I = [0, 1]$ aralığındaki rasyonel sayıları $r_0, r_1, r_2, \dots$ olarak damgalayalım. $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in I$ için

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & x \in \{r_0, \dots, r_n\} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak açıklansın. $f_n \in \mathcal{R}(I)$ ve (f_n) dizisi I 'da, rasyonel noktalarda 1 ve irrasyonel noktalarda 0 değerini alan, f Dirichlet fonksiyonuna yakınsar. $f_n \nearrow f$ olduğunu özellikle belirtelim. Ancak $f \notin \mathcal{R}(I)$! Böylece Riemann integralinin iki zayıf noktasıyla tanıştık. Bunları bir sonraki bölümde Lebesgue integraliyle gidereceğiz.

Teorem 2.4.12 $(f_k) \subset \mathcal{R}(\Omega)$ ve $f_k \xrightarrow{\Omega} f$ ise $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ ve $\int_{\Omega} f = \lim \int_{\Omega} f_k$.

Kanıt. f_n 'nin süreksiz olduğu noktaların kümesi S_n ve $S := \bigcup_{n \geq 0} S_n$ olsun. Lebesgue Ölçütü'nden her S_n bir sıfır kümesidir; Önerme 2.4.6 ile S bir sıfır kümesidir. Her f_n fonksiyonu $\Omega \setminus S'$ 'de sürekli; $f_n \xrightarrow{\Omega \setminus S} f$ olduğu için f fonksiyonu $\Omega \setminus S'$ 'de sürekli. Lebesgue Ölçütü ile $f \in \mathcal{R}(\Omega)$. Diğer yandan

$$\left| \int_{\Omega} f - \int_{\Omega} f_n \right| = \left| \int_{\Omega} (f - f_n) \right| \leq \int_{\Omega} |f - f_n| \leq j_n(\Omega) \|f - f_n\|_{\Omega} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

savın kalanını verir. $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ olduğu ε -Ölçütü'nden de görülebilir. ■

Sonuç 2.4.13 $(f_k) \subset \mathcal{R}(\Omega)$ ve $\sum_{k \geq 0} f_k \xrightarrow{\Omega} f$ ise $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ ve $\int_{\Omega} f = \sum_{k \geq 0} \int_{\Omega} f_k$.

Örnek 2.4.14. $I = [0, 1]$ ve her $n \in \mathbb{N}^*$ için $f_n(x) := \frac{x}{n(x+n)}$, $x \in I$ olsun. f_n monoton artan olduğundan her $x \in I$ için $0 \leq |f_n(x)| \leq 1/n(1+n)$ olur. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

olduğundan $\sum_{n \geq 1} f_n$ serisi I 'da, orada sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsar. Her $x \in I$ için $0 \leq f(x) \leq 1$ ve Sonuç 2.3.18 ile

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f =: \gamma,$$

açıkça $0 < \gamma < 1$. Bu sayıya **Euler sabiti** denir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right) dx = \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}, \text{ dolayısıyla} \\ \sum_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x) dx &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \rightarrow \gamma. \end{aligned}$$

$\lim(\ln n - \ln(n+1)) = 0$ olduğundan $\ln(n+1)$ yerine $\ln n$ alabilir ve

$$\gamma = \lim \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

elde ederiz.

Not 2.4.15 Kurallı fonksiyonlar¹³: $I = [a, b]$ bir kapalı aralık olsun. $\mathcal{M}_r(I)$ ile I aralığındaki merdiven fonksiyonlarının kümesini göstermiştik. Biz $\mathcal{M}_r(I) \subset \mathcal{R}(I)$ olduğunu biliyoruz. Son zamanlarda şöyle bir yol da izlenmektedir. Merdiven fonksiyonları ile başlanır ve bunların integrali (2.62) eşitliği ile tanımlanır. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonu için bir $(t_n) \subset \mathcal{M}_r(I)$ dizisi $t_n \xrightarrow{I} f$ olacak biçimde varsa f bir **kurallı fonksiyon**dur denir. *Bir fonksiyonun kurallı olması her $a < x < b$ için $f(x-0)$ ve $f(x+0)$ limitlerinin, ayrıca $f(a+)$ ve $f(b-)$ limitlerinin olması demektir* (bkz. [11]). Sonra $(\int_I t_n)$ dizisinin yakınsak olduğu ve bu dizinin limitinin seçilen merdiven fonksiyonu dizisinden bağımsız olduğu gösterilir, dd $(t'_n) \subset \mathcal{M}_r(I)$ ve $t'_n \xrightarrow{I} f$ ise $\lim \int_I t_n = \lim \int_I t'_n$ olduğu kanıtlanır. Ardından $\int_I f := \lim \int_I t_n$ olarak açıklanır. Ancak biz $f \in \mathcal{R}(I)$ ve $\int_I f := \lim \int_I t_n$ olduğunu biliyoruz. I 'da tanımlı kurallı fonksiyonların kümesini $\mathcal{R}_u(I)$ ile gösterelim.

Şimdi $\mathcal{R}_u(I) \subsetneq \mathcal{R}(I)$ olduğunu görelim. Örneğin $I = [0, 1]$ ve

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin 1/x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

olsun. f fonksiyonu yalnızca 0 noktasında süreksizdir, dolayısıyla $f \in \mathcal{R}(I)$. Ancak $f \notin \mathcal{R}_u(I)$, çünkü $f(0+)$ limiti yoktur. Bunu bu teoreme başvurmadan da görebiliriz. Gerçekten de I 'nın $\mathcal{Z} = \{0 = x_0, \dots, x_n = 1\}$ parçalanışı verilsin ve $0 < x_1$ olsun. Her $t \in \mathcal{M}_r(\mathcal{Z})$ merdiven fonksiyonu $(0, x_1)$ aralığında sabitken f fonksiyonu bu aralıkta ± 1 değerlerini alır. Dolayısıyla $\|f - t\|_I \geq 1$; öyleyse $f \notin \mathcal{R}_u(I)$. Bu yolu izleyenler, başlangıç için, yine de $\mathcal{R}_u(I)$ 'nın yeterince zengin olduğunu savunurlar. ▲

Genelde izlenen yol: Kısaca özetleyelim. Jordan ölçüsüne girilmez. $\mathcal{F}^n$ 'deki $v_n : \mathcal{F}^n \rightarrow [0, +\infty)$ hacmi ile yetinilir. $Q \in \mathcal{F}^n$ herhangi bir kutu (genelde kapalı kutu yeğlenir) ve $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ bir sınırlı fonksiyon olsun. Q 'nun

¹³Fransızca “fonction réglée”, ingilizce “regulated function” veya “admissible function”, almanca “Regelfunktionen” veya bazen “sıçramalı sürekli fonksiyonlar”.

yalnızca kutulara parçalanışlarıyla çalışılır (Genelde girişimsiz parçalanışla çalışılır). Q 'nun sonlu sayıda kutulara parçalanışlarının kümesini $\mathfrak{Z}_k(Q)$ ile gösterelim. Her $\mathcal{Z} = \{Q_1, \dots, Q_l\} \in \mathfrak{Z}_k(Q)$ için $m_i := \inf f(Q_i)$ ve $M_i := \sup f(Q_i)$ olmak üzere

$$A(f, \mathcal{Z}) = \sum_{1 \leq i \leq l} m_i v_n(Q_i) \text{ ve } U(f, \mathcal{Z}) = \sum_{1 \leq i \leq l} M_i v_n(Q_i) \text{ ve}$$

$$\int_{-Q} f := \sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_k(Q)} A(f, \mathcal{Z}) \text{ ve } \overline{\int}_Q f := \inf_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_k(Q)} U(f, \mathcal{Z})$$

olarak açıklanır. $\int_{-Q} f = \overline{\int}_Q f$ durumunda f fonksiyonu Riemann integralenebilir denir. Bu yaklaşımda f Riemann integrallenebilirse $[0, f] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kümesinin $j_{n+1}([0, f])$ Jordan hacmi $\int_Q f$ olarak açıklanır. $A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir sınırlı küme ve $Q \subset \mathbb{R}^n$ ise, $A \subset Q$ koşulunu sağlayan herhangi bir kutu olmak üzere, $\mathbf{1}_A$ fonksiyonu Q 'da Riemann integrallenebilirse A kümesi Jordan ölçülebilir denir ve $j_n(A) := \int_Q \mathbf{1}_A$ olarak açıklanır. Her iki yaklaşım örtüşür.

2.5 Parametreye Bağlı İntegraller ve Fubini teoremi

Not. Şimdiye kadar Riemann integrallenebilir fonksiyonlara ilişkin teoremler kanıtladık; ancak integrali hesaplama yöntemleri öğrenmedik. İntegral hesaplamasının iki önemli aracı var: Fubini Teoremi ve Değişken Değiştirme Teoremi. Bunlardan ikincisini bir sonraki kısımda ele alacağız. Bu kısımda kanıtlayacağımız Fubini Teoremi $\mathbb{R}^n$ 'deki integrali $\mathbb{R}$ 'deki integrallerle hesaplamamızı sağlar. Kısım 4.7'de $\mathbb{R}$ 'de integrali ayrıntılı olarak ele alacağız.

▲

$A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m, (x, y) \in A \times B$ ve $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x, \cdot) : B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x, \cdot)(y) := f(x, y)$ ve

$f(\cdot, y) : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(\cdot, y)(x) := f(x, y)$ olsun.

Teorem 2.5.1 (Parametreye Bağlı İntegraller) $K \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir bir kompakt küme, $g \in \mathcal{R}(K)$ ve $B \subset \mathbb{R}^m$ olsun.

(i) $f : K \times B \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ise

$$F(y) := \int_K f(\cdot, y)g \equiv: \int_K f(x, y)g(x)dx$$

fonksiyonu B 'de süreklidir.

(ii) B açık olsun. $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ var ve f ve $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ 'nin ikisi de $K \times B$ 'de sürekli ise $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ var ve

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = \frac{\partial}{\partial y_i} \int_K f(x, y)g(x)dx = \int_K \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y)g(x)dx. \quad (2.73)$$

Kanıt. (i) $b \in B$ keyfi verilsin. F 'nin b 'de sürekli olduğunu Dizi Ölçütü ile kanıtlayacağız. $(b_k) \subset B$ ve $b_k \rightarrow b$ olsun. Her k ve her $x \in K$ için $f_k(x) := f(x, b_k)$ ve $h(x) := f(x, b)$ olarak açıklansın. Koşullarımızdan h ve f_k fonksiyonları K 'de süreklidirler. $C := \{b, b_0, b_1, b_2, \dots\}$ kümesi kompakttır; dolayısıyla $K \times C$ kompakttır. f fonksiyonu $K \times C$ 'de düzgün süreklidir. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısını her $(x, y), (x', y') \in K \times C$ için

$$\|x - x'\| < \delta_x, \|y - y'\| < \delta_y \implies |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon \quad (2.74)$$

olacak biçimde seçebiliriz. Bir $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısını her $k \geq k_\varepsilon$ için $\|b_k - b\| < \delta_\varepsilon$ olacak biçimde seçersek (2.74) ile

$$\forall x \in K \forall k \geq k_\varepsilon (|f_k(x) - h(x)| = |f(x, b_k) - f(x, b)| < \varepsilon)$$

elde ederiz. Dolayısıyla $f_k \xrightarrow{K} h$; buradan da, g sınırlı olduğundan $f_k g \xrightarrow{K} hg$ olur. Teorem 2.4.12 ile

$$\lim F(b_k) = \lim \int_K f(\cdot, b_k)g = \int_K \lim f(\cdot, b_k)g = \int_K \lim f_k g = \int_K hg = F(b)$$

olur. Dolayısıyla F fonksiyonu b 'de süreklidir.

(ii) Şimdi B açık olsun ve $b \in B$ keyfi verilsin. $C \subset B$ ise b noktasının bir kompakt komşuluğu olsun. $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ fonksiyonu $K \times C$ kompakt kümesinde düzgün süreklidir. e_i standart birim vektörümüz ve $(r_k) \subset \mathbb{R}^*$ bir sıfır dizisi olmak üzere, Ortalama Değer Teoremi'nden, $|r'_k| \leq r_k$ koşulunu sağlayan r'_k 'ler ile

$$\frac{f(x, b + r_k e_i) - f(x, b)}{r'_k} = \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, b + r'_k e_i)$$

olur. $\frac{\partial f}{\partial y_i}(x, b + r'_k e_i) \xrightarrow{K} \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, b)$ ve g sınırlı olduğundan

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(x, b + r'_k e_i)g(x) \xrightarrow{K} \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, b)g(x).$$

Bu ve Teorem 2.4.12 (2.73)'ü verir. $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ 'nin sürekliliği (i)'den çıkar. ■

Sonuç 2.5.2 $0 \leq k \leq +\infty$ olmak üzere f 'nin $y_1, \dots, y_m$ 'lere göre k .ci dereceye kadar tüm kısmi türevleri var ve bunlar $K \times B$ 'de sürekli iseler $F \in C^k(B)$.

Not. Bir kez $F(y)$ hesaplanmışsa, (2.73) eşitliği, sağındaki integrali, soldaki türev aracılığı ile bulmamızı sağlar. Örneğin $f : [0, 1] \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x, y) = x^y$ olarak verilmişse, ileride öğreneceğimiz bilgilerle kolayca görebileceğimiz gibi

$$F(y) = \int_0^1 x^y dx = \frac{1}{1+y},$$

dolayısıyla

$$\int_0^1 x^y (\ln x)^k dx = F^{(k)}(y) = \frac{(-1)^k k!}{(y+1)^{k+1}}.$$

▲

En yalın haliyle Fubini Teoremi, I, J sonlu kümeler ve $a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{i \in I, j \in J} a_{ij} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{ij} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{ij} \right)$$

eşitliğidir.

$A \subset \mathbb{R}^n$ ve $B \subset \mathbb{R}^m$ Jordan ölçülebilir olmak üzere $f \in \mathcal{R}(A \times B)$ verilsin. Her $x \in A$ için $f(x, \cdot)$ 'in $\mathcal{R}(B)$ 'de ve her y için $f(\cdot, y)$ 'nin $\mathcal{R}(A)$ 'da olması gerekmez. Örneğin $A = B = [0, 1]$ ve $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. f Riemann integrallenebilir. Şimdi $S = \{1/2\} \times B$ olmak üzere $g : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu şöyle açıklansın: $(A \times B) \setminus S$ 'de g ve f aynı değeri alsınlar; g 'nin $(1/2, y)$ 'deki değeri y rasyonelse 1, irrasyonelse 0 olsun. S sıfır hacimli olduğundan g fonksiyonu $A \times B$ 'de Riemann integrallenebilir. Ancak $g(1/2, \cdot)$ fonksiyonu B 'de integrallenemez.

Tersine bir $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonu verilsin. Her $x \in A$ için $f(x, \cdot)$ fonksiyonu B 'de Riemann integrallenebilir ve her $y \in B$ için $f(\cdot, y)$ fonksiyonu A 'da Riemann integrallenebilir olsa bile f 'nin $A \times B$ 'de Riemann integrallenebilir olması gerekmez. Örneğin $A = B = I = [0, 1]$ olmak üzere $Q := [0, 1] \times [0, 1]$ kapalı kutusu olsun. Bir an için Q 'da yoğun bir Y kümesini şu şekilde bulduğumuzu varsayalım. Her $x \in I$ için $\{x\} \times I$ çubuğu Y 'ye ait en fazla bir nokta ve benzer biçimde her $y \in I$ için $I \times \{y\}$ çubuğu Y 'ye ait en fazla bir nokta içersin. Şimdi $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f|Y := 1$ ve $f|(Q \setminus Y) := 0$ olarak açıklansın, dd $f = 1_Y$ olsun. $f \notin \mathcal{R}(Q)$ olduğu kolayca görülür. Diğer yandan her x için $f(x, \cdot)$ fonksiyonu B 'de ve her $y \in A$ içinse $f(\cdot, y)$ fonksiyonu A 'da Riemann integrallenebilir. Ayrıca

$\varphi(x) := \int_B f(x, y) dy = 0$ ve φ de A 'da integrallenebilir. $\int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx$ ardışık integrali var, ancak f fonksiyonu $A \times B$ 'de integrallenemez. Sıra böyle bir Y kümesini bulmaya kaldı ve burada da, geometri ve sezgi yine bizi çaresiz bırakıyor! Q 'nun topolojisinin sayılabilir bazı vardır. Örneğin baz olarak Q 'daki, merkezleri $Q \cap \mathbb{Q}^2$ 'de ve yarıçapları da rasyonel olup Q 'ya düşen açık topları alabiliriz. Bunlar sayılabilir çokluktadırlar: Onları $A_1, A_2, A_3, \dots$ olarak numaralandıralım. $a_1 \in A_1$ ögesini rastgele seçelim. Şimdi $a_i \in A_i$ olmak üzere $a_1, \dots, a_{n-1}$ seçilmiş olsunlar. Bu noktaların koordinatları $2(n-1)$ tane, yani sonludur. A_n bir açık küme olduğundan bir $a_n \in A_n$ noktasını, her bir koordinatı bu $2(n-1)$ koordinattan farklı olarak seçilebilir. Y kümesi Q 'da yoğundur ve istenen koşulu sağlar.

$$\begin{aligned} \underline{f_B}(x) &:= \int_{\underline{B}} f(x, \cdot) = \int_{\underline{B}} f(x, y) dy \text{ ve } \overline{f_B}(x) := \int_{\overline{B}} f(x, \cdot) = \int_{\overline{B}} f(x, y) dy \\ \underline{f_A}(y) &:= \int_{\underline{A}} f(\cdot, y) = \int_{\underline{A}} f(x, y) dx \text{ ve } \overline{f_A}(y) := \int_{\overline{A}} f(\cdot, y) = \int_{\overline{A}} f(x, y) dx \end{aligned}$$

olsun. Bu gösterimlerle aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 2.5.3 (Fubini Teoremi) $A \subset \mathbb{R}^n$ ve $B \subset \mathbb{R}^m$ Jordan ölçülebilir ve $f \in \mathcal{R}(A \times B)$ olsun. $\underline{f_A}, \overline{f_A} \in \mathcal{R}(B)$, $\overline{f_B}, \underline{f_B} \in \mathcal{R}(A)$ ve

$$\int_{A \times B} f = \int_A \underline{f_B} = \int_A \overline{f_B} = \int_B \underline{f_A} = \int_B \overline{f_A} \quad (2.75)$$

Sonuç 2.5.4 $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve sınırlı ise

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

Kanıt. Biz (2.75)'teki ilk eşitliği kanıtlayacağız; diğerleri benzer biçimde kanıtlanır. I, J sonlu damga kümeleri olmak üzere $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ ve $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ sırasıyla A ve B 'nin birer parçalanışları olsunlar. Bu durumda $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A_i \times B_j \mid i \in I, j \in J\}$, $A \times B$ 'nin bir parçalanışdır. $m_{ij} := \inf f(A_i \times B_j)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A(f, \mathcal{A} \times \mathcal{B}) &= \sum_{i \in I, j \in J} m_{ij} j_{n+m}(A_i \times B_j) = \sum_{i \in I, j \in J} m_{ij} j_n(A_i) j_m(B_j) \\ &= \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} m_{ij} j_m(B_j) \right) j_n(A_i) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Her $x \in A_i$ için $m_{ij} \leq \inf_{y \in B_j} f(x, y) = \inf f(x, \cdot)(B_j) =: m_{x,j}$. Buradan

$$\sum_{j \in J} m_{ij} j_m(B_j) \leq \sum_{j \in J} m_{x,j} j_m(B_j) = A(f(x, \cdot), \mathcal{B}) \leq \int_{\underline{B}} f(x, \cdot) = \underline{f}_B(x).$$

Dolayısıyla $\sum_{j \in J} m_{ij} j_m(B_j) \leq \inf \underline{f}_B(A_i)$ ve (2.76) eşitliğinden

$$A(f, \mathcal{A} \times \mathcal{B}) \leq \sum_{i \in I} \inf \underline{f}_B(A_i) j_n(A_i) = A(\underline{f}_B, \mathcal{A}).$$

Benzer biçimde $U(\underline{f}_B, \mathcal{A}) \leq U(f, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ kanıtlanır. Sonuçta

$$A(f, \mathcal{A} \times \mathcal{B}) \leq A(\underline{f}_B, \mathcal{A}) \leq U(\underline{f}_B, \mathcal{A}) \leq U(f, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$$

olur. Buradan, $f \in \mathcal{R}(A \times B)$ olduğundan $\underline{f}_B \in \mathcal{R}(A)$ ve $\int_{A \times B} f = \int_A \underline{f}_B$ elde edilir. Tüm diğer eşitsizlikler benzer biçimde kanıtlanır. ■

(2.75) eşitlikleri açık yazılımla aşağıdakilerdir:

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_{\underline{B}} f(x, y) dy \right) dx = \int_A \left(\overline{\int_B} f(x, y) dy \right) dx \quad (2.77)$$

$$= \int_B \left(\int_{\underline{A}} f(x, y) dx \right) dy = \int_B \left(\overline{\int_A} f(x, y) dx \right) dy. \quad (2.78)$$

Eğer her $x \in A$ için $f(x, \cdot) \in \mathcal{R}(B)$ ise

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f(x, \cdot) \right) dx = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx, \quad (2.79)$$

eğer her $y \in B$ için $f(\cdot, y) \in \mathcal{R}(A)$ ise

$$\int_{A \times B} f = \int_B \left(\int_A f(\cdot, y) \right) dy = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy. \quad (2.80)$$

$Q = I_1 \times \cdots \times I_n$, $I_k = [a_k, b_k]$, $f \in \mathcal{R}(Q)$ ve π bir permütasyon ise $\int_Q f = \int_Q \pi \circ f$ olduğundan

$$\int_Q f = \int_{I_{\pi(1)}} \left(\int_{I_{\pi(2)}} \cdots \left(\int_{I_{\pi(n)}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{\pi(n)} \cdots dx_{\pi(2)} \right) dx_{\pi(1)} \right).$$

Burada her bir f yerine $\int$ altintegrali veya $\overline{\int}$ üstintegrali de alınabilir. Eğer $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ise

$$\int_Q f = \int_{I_{\pi(1)}} \left(\int_{I_{\pi(2)}} \cdots \left(\int_{I_{\pi(n)}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{\pi(n)} \right) \cdots dx_{\pi(2)} \right) dx_{\pi(1)} \quad (2.81)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir ve $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ ise bir Q kapalı kutusunu $\Omega \subset Q$ olarak seçersek, Q 'nun seçiminden bağımsız olarak, $\int_{\Omega} f = \int_Q f_Q$ olduğunu biliyoruz. Böylece $\int_{\Omega} f$ integralini hesaplama, (2.81) eşitliği ile, tek değişkenli integralleri hesaplamaya indirgenmiştir.

Sonuç 2.5.5 (Cavalieri İlkesi) $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Jordan ölçülebilir kümesi, $\alpha \leq \beta$ olmak üzere $x_{n+1} = \alpha$ ve $x_{n+1} = \beta$ hiperdüzlemleri arasında düşsün. Her $t \in [\alpha, \beta]$ için $\Omega_t := \{x \in \mathbb{R}^n | (x, t) \in \Omega\}$ Jordan ölçülebilirse

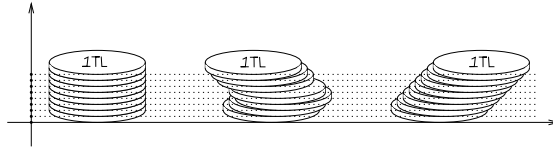
$$j_{n+1}(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} j_n(\Omega_t) dt.$$

Kanıt. $\mathbb{R}^n$ 'de Q kutusunu $\Omega \subset Q \times [\alpha, \beta]$ olacak biçimde seçelim. Fubini ile

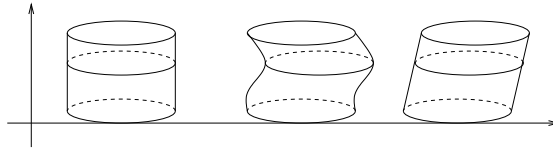
$$j_{n+1}(\Omega) = \int_{Q \times [\alpha, \beta]} \mathbf{1}_{\Omega} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_Q \mathbf{1}_{\Omega}(x, t) dx \right) dt = \int_{\alpha}^{\beta} j_n(\Omega_t) dt. \quad \blacksquare$$

Cavalieri İlkesi'nin bir sonucu şudur: $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri $x_{n+1} = \alpha$ ve $x_{n+1} = \beta$ hiperdüzlemleri arasında düşüyor, her $t \in [\alpha, \beta]$ için Ω_t, Ω'_t Jordan ölçülebilir ve $j_n(\Omega_t) = j_n(\Omega'_t)$ ise $j_{n+1}(\Omega) = j_{n+1}(\Omega')$. Cavalieri İlkesi genelde bu şekli ile bilinir. Ancak bu düşünce Arşimed'de vardır; biraz aşağıda kürenin hacmini nasıl hesapladığını göreceğiz.

Cavalieri İlkesi'nden dolayı şekildeki dik silindir ve diğer nesneler aynı hacme sahiptirler.



Şekil 2.3: Üstüste konmuş liralar (kaba Cavalieri).



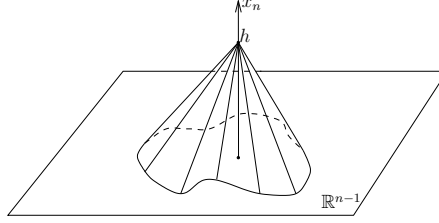
Şekil 2.4: Cavalieri İlkesi.

Örnek 2.5.6. 1. Silindirin hacmi: $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ Jordan ölçülebilir, $h \geq 0$ ve $S_h(B) = B \times [0, h]$ olsun. Çarpım teoreminden $j_n(S_h(B)) = j_{n-1}(B) \cdot j_1([0, h]) = j_{n-1}(B)h$ olduğunu

biliyoruz. Aynı sonuç Cavalieri ile şöyle de kazanılır. Her $t \in [0, 1]$ için $(S_h(B))_t = B$ olduğundan,

$$j_n(S_h(B)) = \int_{S_h(B)} dj_n = \int_0^h \left(\int_B dj_{n-1} \right) dt = \int_0^h j_{n-1}(B) dt = j_{n-1}(B)h$$

olur. S_e , B tabanlı h yükseklikli bir eğik silindirse her $t \in [0, 1]$ için $(S_h(B))_t = (S_e)_t = B$ olacağından, Cavalieri ilkesi ile $j_n(S_e) = j_{n-1}(B)h$ olur.



Şekil 2.5: Koni.

2. Tabanı B ve yüksekliği h olan bir koninin hacmi: $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ölçülebilir ve $0 < h \in \mathbb{R}$ ise

$$C_h(B) := \{((1 - \xi)x, \xi h) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x \in B, 0 \leq \xi \leq 1\}$$

kümesine $\mathbb{R}^n$ 'de B tabanlı, h yükseklikli bir **koni** diyelim. Konimizin $x_n = t$ için $C_h(B)_t$ kesiti $t < 0$ ve $t > h$ için $\emptyset$ kümedir ve $t \in [0, h]$ içinse $C_h(B)_t = (1 - t/h)B$ olur. Böylece¹⁴

$$\begin{aligned} j_{n-1}(C_h(B)_t) &= \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} j_{n-1}(B) \quad 0 \leq t \leq h, \\ j_n(C_h(B)) &= \int_0^h j_{n-1}(C_h(B)_t) dt = j_{n-1}(B) \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} dt = \frac{h}{n} j_{n-1}(B). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Özel olarak $\mathbb{R}^3$ 'te $j_3(C_h(B)) = \frac{h}{3} j_2(B) = \frac{1}{3} j_3(S_h(B))$; bunu integral yokken Arşimed de biliyordu! Özel olarak B , yarıçapı r olan bir daire ise $j_3(C_h(B)) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ olur.

3. Bir simpleksin hacmi: $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinin gerdiği **simpleksten**

$$S(a_0, a_1, \dots, a_n) := \left\{ \sum_{0 \leq i \leq n} p_i a_i \mid p_i \geq 0, \sum_{0 \leq i \leq n} p_i = 1 \right\}$$

kümesi anlaşılır. Biz

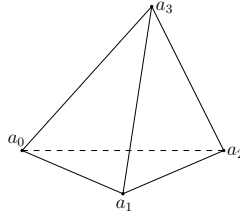
$$j_n(S(a_0, a_1, \dots, a_n)) = \frac{1}{n!} \det(a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0)$$

olduğunu kanıtlayacağız.

Hacim ötelemeye göre değişmediğinden $a_0 = 0$ alabiliriz. $e_1, \dots, e_n$ vektörleri $\mathbb{R}^n$ uzayımızın doğal bazı olmak üzere, önce tümevarımla

$$j_n(S(0, e_1, \dots, e_n)) = \frac{1}{n!} \det(e_1, \dots, e_n) = \frac{1}{n!}$$

¹⁴ $\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} dt = \int_0^1 (1 - u)^{n-1} h du = \frac{h}{n}$.



Şekil 2.6: Simpleks.

olduğunu kanıtlayacağız. $n = 1$ için $S_1(0, e_1) = [0, 1]$ olduğundan savımız doğrudur. Savımız $n - 1$ için kanıtlanmış olsun (tümevarım koşulu). Şimdi, $S(0, e_1, \dots, e_n)$ simpleksi $S(0, e_1, \dots, e_{n-1})$ tabanlı ve yüksekliği 1 olan bir koni olduğundan (2.82) ile

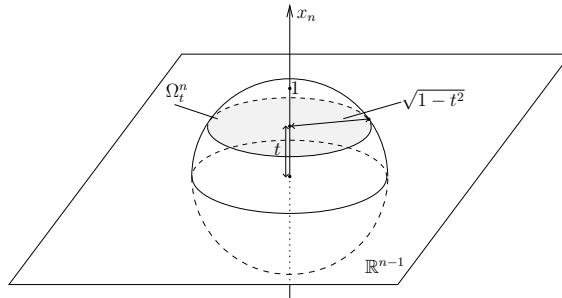
$$j_n(S(0, e_1, \dots, e_n)) = \frac{1}{n} j_{n-1}(S(0, e_1, \dots, e_{n-1})) \stackrel{tvk}{=} \frac{1}{n} \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!}$$

olur. $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ doğrusal dönüşümü $L(e_i) := a_i$ olarak açıklanırsa $L(S(0, e_1, \dots, e_n)) = S(0, a_1, \dots, a_n)$ olur. Teorem 2.2.24'ten dolayı

$$j_n(S(0, a_1, \dots, a_n)) = |\det L| j_n(S(0, e_1, \dots, e_n)) = \frac{1}{n!} \det(a_1, \dots, a_n).$$

Burada $(a_1, \dots, a_n)$ 'den sütunları $a_1, \dots, a_n$ olan $n \times n$ matrisi anlaşılacaktır.

4. Kürenin hacmi: $r > 0$ olmak üzere $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ doğrusal dönüşümü $L(x) = rx$ olarak açıklansın. $\det L = r^n$ olduğundan $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilirse rA da Jordan ölçülebilir ve Teorem 2.2.24'ten $j_n(rA) = r^n j_n(A)$ olur. Özel olarak $\bar{B}_r^n$ ile $\mathbb{R}^n$ 'deki 0-merkezli r -yarıçaplı kapalı topu gösterirsek, $\bar{B}_r^n = r\bar{B}_1^n$ olduğundan $j_n(\bar{B}_r^n) = r^n j_n(\bar{B}_1^n)$ olur. Dolayısıyla $\bar{B}_1^n$ 'nin hacmini hesaplamak yeterlidir. $\tau_n := j_n(\bar{B}_1^n)$ dersek $j_n(\bar{B}_r^n) = r^n \tau_n$ olur(*). Dolayısıyla τ_n 'i hesaplamak yeterlidir. $n = 1$ için $\bar{B}_1^1$ kapalı bir topumuz $[-1, 1]$ kapalı aralığı olduğundan $\tau_1 = 2$ olur. Yalnlık açısından $\Omega^n := \bar{B}_1^n$ dersek, $n \geq 2$ ve her $t \in [-1, 1]$ için Ω_t^n kümesi $\mathbb{R}^{n-1}$ de yarıçapı $\sqrt{1-t^2}$ olan kapalı toptur, $|t| > 1$ içinse $\Omega_t = \emptyset$. Dolayısıyla(*) ile $j_{n-1}(\Omega_t^n) = (\sqrt{1-t^2})^{n-1} \tau_{n-1}$. Cavalieri ilkesi ile



Şekil 2.7: Küre.

$$\begin{aligned}\tau_n &= j_n(\Omega^n) = \tau_{n-1} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt \\ &= \tau_{n-1} \int_0^\pi \sin^n x dx = \tau_{n-1} 2 \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx =: \tau_{n-1} c_n.\end{aligned}$$

Örnek 2.7.11(6)'da c_n 'leri nasıl hesaplayacağımızı öğrendik. O bilgi ışığında

$$\tau_{2k} = \frac{1}{k!} \quad \text{ve} \quad \tau_{2k+1} = \frac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \pi^k$$

olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Dolayısıyla

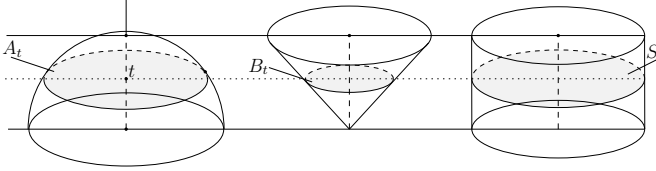
$$\tau_1 = 2, \quad \tau_2 = \pi, \quad \tau_3 = \frac{4\pi}{3}, \quad \tau_4 = \frac{\pi^2}{2}, \quad \tau_5 = \frac{8\pi^2}{15}, \dots$$

olur. Dolayısıyla $n \geq 1$ için $\mathbb{R}^n$ 'deki r yarıçaplı kapalı topun hacmi sırasıyla

$$2r, \quad \pi r^2, \quad \frac{4\pi}{3} r^3, \quad \frac{\pi^2}{2} r^4, \quad \frac{8\pi^2}{15} r^5, \dots$$

olur.

5. Arşimed'in küre hacmi hesabı: Arşimed yarıçapı r olan bir kürenin hacmini, Cavalieri'nin irdelemelerine benzer irdelemelerle şöyle hesaplamıştır: Yarıçapı r olan A yarıküresi, tabanının yarı çapı ve yüksekliği r olan B konisi; taban yarıçapı ve yüksekliği r olan S silindiri uzayımıza Şekil (2.8)'deki gibi yerleştirilmiş olsun.



Şekil 2.8: Arşimed'in küre hacmi hesaplama yöntemi.

$\Omega = A \sqcup B$ ve $\Omega' = S$ olmak üzere her $t \in [0, r]$ için $\Omega_t = A_t \sqcup B_t$ ve Ω'_t Jordan ölçülebilir ve

$$j_n(\Omega_t) = j_n(A_t) + j_n(B_t) = \pi(r^2 - t^2) + \pi t^2 = \pi r^2 = j_n(\Omega'_t)$$

olduğundan

$$j_{n+1}(\Omega) = j_{n+1}(A) + j_{n+1}(B) = j_{n+1}(S)$$

olur. $j_{n+1}(S) = \pi r^3$ ve $j_{n+1}(B) = \frac{\pi}{3} r^3$ olduğunu biliyorsak, ki Arşimed bunları biliyordu, A yarıküresinin hacmi $\pi r^3 - \frac{\pi}{3} r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$ olur. Dolayısıyla yarıçapı r olan bir kürenin hacmi $\frac{4}{3} \pi r^3$ olur.

2.6 Değişken Değişimi

$L \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ ve $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü $\Phi(x) = Lx + b$ olarak verilmişse Teorem 2.2.24'te her Jordan ölçülebilir $A \subset \mathbb{R}^n$ için $B := \Phi(A)$

kümesinin de Jordan ölçülebilir ve $j_n(B) = |\det L| j_n(A)$ olduğunu kanıtladık. Bu sonuç, her x için $J_\Phi(x) = L$ olduğunu gözetirsek,

$$\int_{\Phi(A)} \mathbf{1}_{\Phi(A)} \equiv \int_B \mathbf{1}_B = \int_A |\det J_\Phi| \mathbf{1}_A$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \circ \Phi = \mathbf{1}_{\Phi(A)} \circ \Phi$ olduğundan bu eşitlik

$$\int_{\Phi(A)} \mathbf{1}_{\Phi(A)} = \int_A (\mathbf{1}_{\Phi(A)} \circ \Phi) |\det J_\Phi|$$

şeklini alır. Bu kısımda amacımız, Φ belli koşulları sağladığında, her $f \in \mathcal{R}(\Phi(A))$ için

$$\int_{\Phi(A)} f = \int_A (f \circ \Phi) |\det J_\Phi|$$

olduğunu kanıtlamaktır. Böyle bir eşitlikten söz edebilmek için her şeyden önce $(f \circ \Phi) |J_\Phi|$ fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olmasını garantilemek gerekir.

Şimdi $U, V \subset \mathbb{R}^n$ açık kümeler ve $\Phi : U \rightarrow V$ bir $\mathcal{C}^1$ eşyapı dönüşümü olsun. $B \subset V$ Jordan ölçülebilir, $f \in \mathcal{R}(B)$ ve $A := f^{-1}(B)$ olsun. B 'nin her $\{B_i\}$ parçalanışı bize A 'nın bir $\{A_i = \Phi^{-1}(B_i)\}$ parçalanışını, tersine A 'nın her $\{A_i\}$ parçalanışı ise B 'nin bir $\{B_i = \Phi(A_i)\}$ parçalanışını verir. $b_i \in B_i$ ve $a_i = \Phi^{-1}(b_i)$ olmak üzere

$$\int_B f \approx \sum_i f(b_i) j_n(B_i) = \sum_i f(\Phi(a_i)) j_n(B_i)$$

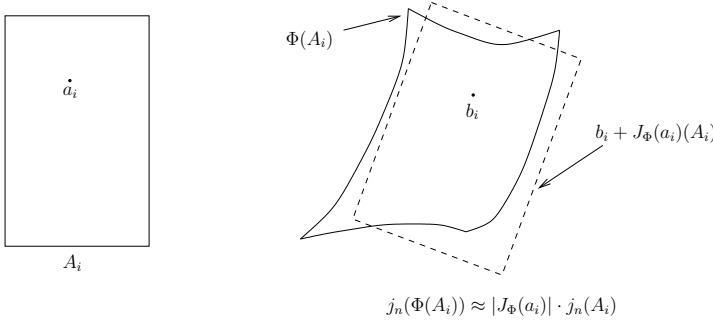
Eğer $\Phi = L$ bir doğrusal dönüşümse, yukarıdaki irdelemelerden,

$$\begin{aligned} \int_B f &\approx \sum_i f(\Phi(a_i)) j_n(B_i) = \sum_i f(\Phi(a_i)) |\det J_\Phi(a_i)| j_n(A_i) \\ &\approx \int_A (f \circ \Phi) |\det J_\Phi|. \end{aligned}$$

Peki Φ bir doğrusal dönüşüm değilse ne yapacağız?

Analizde sıkça başvurduğumuz doğrusallaştırmadan yararlanacağız: a_i 'nin yeterince küçük bir komşuluğundaki her $x + a_i \in A_i$ için $\Phi(a_i + x) \approx \Phi(a_i) + J_\Phi(a_i)x$ olduğundan $B_i = \Phi(A_i) \approx b_i + J_\Phi(a_i)(A_i)$, dolayısıyla $j_n(B_i) \approx |\det J_\Phi(a_i)| j_n(A_i)$ olur (bkz. Şekil 2.9). Sonuçta yukarıdaki bağıntılar, yeterince küçük seçilmiş A_i 'ler için

$$\begin{aligned} \int_B f &\approx \sum_i f(\Phi(a_i)) j_n(B_i) \approx \sum_i f(\Phi(a_i)) |\det J_\Phi(a_i)| j_n(A_i) \\ &\approx \int_A (f \circ \Phi) |\det J_\Phi| \end{aligned}$$



Şekil 2.9: Değişken değişimi

şeklini alır ve bu, değişken değişiminin özüdür.

Teorem 2.6.1 (Sard) $K \subset \mathbb{R}^n$ bir kapalı küp ve $f \in \mathcal{C}^1(K)$ ise¹⁵

$$\bar{j}_n(f(K)) \leq \int_K |\det J_f| = \int_K |\det J_f(x)| dx.$$

Kanıt. Küpümüz bozuksa savımız doğrudur. Şimdi küpümüz bozuk olmasın. Bu koşulda savımız yanlışsa bir $\varepsilon > 0$ ile

$$\bar{j}_n(f(K)) \geq \int_K |\det J_f| + \varepsilon j_n(K) \quad (2.83)$$

olur. Küpümüzün kenar uzunluğu a ise kenarları yarılayarak 2^n tane, kenar uzunluğu $a/2$ olan $K_1, \dots, K_{2^n}$ küplerini elde edelim. Her K_i için

$$\bar{j}_n(f(K_i)) < \int_K |\det J_f| + \varepsilon j_n(K_i), \quad i = 1, \dots, 2^n$$

olamaz! Aksi halde bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplayarak, Önerme 2.2.10(iv) yardımıyla, 2.83 ile çelişen bir sonuca ulaşırdık. Dolayısıyla K_i küplerimizin en az biri için, onu K^1 ile göstereyim,

$$\bar{j}_n(f(K^1)) \geq \int_{K^1} |\det J_f| + \varepsilon j_n(K^1).$$

Bu kenar yarılama işlemini sürdürerek içiçe geçmiş, daralan (K^i) küpler dizisini

$$\frac{\bar{j}_n(f(K^i))}{j_n(K^i)} \geq \frac{1}{j_n(K^i)} \int_{K^i} |\det J_f| + \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.84)$$

¹⁵Bir $U \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi ve bir $k \in \mathbb{N}$ için $f \in \mathcal{C}^k(\bar{U})$ şu anlam gelecektir: $f \in \mathcal{C}^k(U)$, $f \in \mathcal{C}(\bar{U})$ ve f 'nin dereceleri $\leq k$ olan tüm kısmi türevleri $\bar{U}$ 'ya sürekli genişletilebilir.

olacak biçimde elde ederiz. $\bigcap_{i \geq 1} K^i =: \{\xi\}$ olsun. Bir öteleme, savımızda ve yaptıklarımızda bir şey değiştirmeyeceği için $\xi = 0$ alabiliriz. f türevlenebilir olduğundan, $L := f'(0)$ olmak üzere $\lim_{r \downarrow 0} \delta(r) = 0$ olmak üzere

$$f(x) = f(0) + Lx + R(x), \quad \|R(x)\| \leq \|x\| \delta(\|x\|) \quad (2.85)$$

olur. $b := d(K) = \sqrt{n}a$ dersek $d(K^i) = 2^{-i}b$ olur. Her $x \in K^i$ için $\|R(x)\| \leq \varepsilon_i := 2^{-i}b\delta(2^{-i}b)$ elde ederiz. $C := L(K)$ ve $C^i := L(K^i)$ dersek (2.85)'ten

$$f(K^i) \subset f(0) + U_{\varepsilon_i}(C^i) \quad (2.86)$$

elde ederiz. Herhangi bir $A \subset \mathbb{R}^n$ ve $\varepsilon, \lambda > 0$ için daima $U_\varepsilon(A) = A + B_\varepsilon(0)$ ve $\lambda U_\varepsilon(A) = U_{\lambda\varepsilon}(\lambda A)$ geçerlidir. Şimdi $\varepsilon_i =: 2^{-i}\delta_i$ olarak tanımlarsak $\delta_i \rightarrow 0$. Uygun $b_i \in \mathbb{R}^n$ noktalarıyla

$$C^i = b_i + 2^{-i}C, \quad \text{dolayısıyla } U_{\varepsilon_i}(C^i) = b_i + 2^{-i}U_{\delta_i}(C). \quad (2.87)$$

Teorem 2.2.24'ten dolayı $j_n(C) = |\det L| j_n(K)$. Diğer yandan $\lambda > 0$ için $\bar{j}_n(\lambda K) \leq \lambda^n \bar{j}_n(K)$. Dolayısıyla (2.86), (2.87) ve 2.2.10 (i) ile

$$\frac{\bar{j}_n(f(K^i))}{j_n(K^i)} \leq \frac{2^{-ni} \bar{j}_n(U_{\delta_i}(C))}{2^{-ni} j_n(K^i)} = |\det L| \frac{\bar{j}_n(U_{\delta_i}(C))}{j_n(C)} \rightarrow |\det L| \quad (i \rightarrow +\infty). \quad (2.88)$$

Diğer yandan (2.84)'te limite geçerse

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\bar{j}_n(K^i)}{j_n(K^i)} \geq |\det L| + \varepsilon$$

elde ederiz. Bu (2.88) ile çelişir ve işimiz biter. ■

Sonuç 2.6.2 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir bir açık küme ve $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ise Lipschitz sürekli ve $\mathcal{C}^1$ -sınıfından olsun. Her Jordan ölçülebilir $A \subset \Omega$ için

$$\bar{j}_n(f(A)) \leq \int_A |\det f'(x)| dx = \int_A |J_f(x)| dx. \quad (2.89)$$

Kanıt. $f \in \mathcal{C}^1(A)$ olduğundan $|\det J_f| \in \mathcal{C}(A)$. Teoreminizden dolayı savımız, A 'yı içeriden tüketen her $A_{[k]}$ küpler toplamı için geçerlidir, dd

$$\bar{j}_n(f(A_{[k]})) \leq \int_{A_{[k]}} |\det f'| = \int_{A_{[k]}} |J_f|. \quad (2.90)$$

L, f için bir Lipschitz sabiti olsun. Önsav 2.2.19 ile

$$\bar{j}_n(f(A \setminus A_{[k]})) \leq (L \sqrt[n]{n}) j_n(A \setminus A_{[k]}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Bu, Teorem 2.3.23 (iii) ve $k \rightarrow +\infty$ için $\int_{A_{[k]}} \rightarrow \int_A$ ve $\bar{j}_n(f(A_{[k]})) \rightarrow \bar{j}_n(f(A))$ savı verir. ■

Teorem 2.6.3 (Dönüştürme Teoremi) $H \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ birer açık küme, $\bar{H} \subset V$ ve $\Phi : V \rightarrow U$ bir $\mathcal{C}^1$ -eşyapı dönüşümü olsun. Bu koşullarda $G := \Phi(H)$ Jordan ölçülebilir ve her sınırlı $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$\int_G f(x)dx \equiv \int_{\Phi(H)} f = \int_H (\Phi \circ f) |\det \Phi'| \equiv \int_H (\Phi(f(u))) |\det \Phi'(u)| du. \quad (2.91)$$

Burada f , ya daima $\int$, ya da daima $\bar{\int}$ alınacaktır. Özellikle f 'nin G 'de integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $(\Phi \circ f) |\det \Phi'|$ 'nin H 'de integrallenebilir olmasıdır ve bu durumda

$$\int_G f \equiv \int_{\Phi(H)} f = \int_H (\Phi \circ f) |\det \Phi'| \quad (\text{Dönüşüm Formülü}) \quad (2.92)$$

Kanıt. Her şeyden önce $\Phi : V \rightarrow U$ bir açık dönüşümdür¹⁶. Diğer yandan Teorem 2.2.20'den dolayı $\Phi(\bar{H}) = \bar{G}$. Φ dönüşümü $\bar{H}$ 'de, $\Psi := \Phi^{-1}$ ise $\bar{G}$ 'de Lipschitz süreklidir¹⁷. Teorem 2.2.20'den dolayı Ψ dönüşümü, Jordan ölçülebilir $G_i \subset G$ altkümelerini Jordan ölçülebilir $H_i := \Psi(G_i)$ kümelerine ve tersine olarak Φ dönüşümü Jordan ölçülebilir $H_i \subset H$ altkümelerini, Jordan ölçülebilir $G_i = \Psi(H_i)$ kümelerine resmeder. Sonuç 2.6.2'den dolayı- $j_n(G_i) = j_n(G_i)$ olduğundan-

$$j_n(G_i) \leq \int_{H_i} |\det \Phi'| = \int_{H_i} |\det \Phi'(u)| du. \quad (2.93)$$

(a) $f : G \rightarrow [0, +\infty)$ sınırlı olsun. Şimdi bir $\mathcal{Z} = \{G_i\} \in \mathfrak{Z}(G)$ parçalanışı verilsin. $m_i = \inf f(G_i)$ ve $t := t_{f,\mathcal{Z}} = \sum_i m_i \mathbf{1}_{G_i}$ olmak üzere $0 \leq t \leq f$. Bu durumda $t \circ \Phi \leq f \circ \Phi$ ve $t \circ \Phi = \sum_i m_i \mathbf{1}_{H_i}$. Önerme 2.3.22 (iii) ve (2.93) ile

$$A(f, \mathcal{Z}) = \sum m_i j_n(G_i) \leq \sum m_i \int_{H_i} |\det \Phi'| = \int_H (t \circ \Phi) |\det \Phi'|$$

Bu eşitsizlikte $t \circ \Phi$ yerine $f \circ \Phi$ alırsak, eşitsizliğin sağ yanını olsa olsa büyütürüz. Koşullarımızdan $\{G_i\}$ G 'nin parçalanışlarını tararken $\{H_i\}$ 'ler H 'nin parçalanışlarını tarar. Dolayısıyla bu eşitsizlikte $\mathcal{Z}$ üzerinden supremuma geçerse

$$\int_G f \leq \int_H (f \circ \Phi) |\det \Phi'| \quad (2.94)$$

¹⁶ $G \subset \mathbb{R}^n$ açık, $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^n)$ ve her $x \in G$ için $\det J_f(x) \neq 0$ ise f bir açık dönüşümdür.

¹⁷ $G \subset \mathbb{R}^n$ açık ve $f \in \mathcal{C}^1(G)$ ise f fonksiyonu $K \subset G$ kompakt altkümelerinde Lipschitz süreklidir.

eşitsizliğini elde ederiz. Φ ve $\Psi = \Phi^{-1}$ aynı özelliklere sahip olduğundan benzer biçimde her $h : H \rightarrow [0, +\infty)$ sınırlı fonksiyonu için

$$\int_{\underline{H}} h \leq \int_{\underline{G}} (h \circ \Psi) |\det \Psi'| \quad (2.95)$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\Phi(\Psi(x)) \equiv x$ olduğundan $\Phi'(\Psi(x))\Psi'(x) = I^n$ (birim matris), dolayısıyla $\det \Phi'(\Psi) \cdot \det \Psi' \equiv 1$ olur. (2.95) eşitsizliğinde $h := (f \circ \Phi) |\det \Phi'|$ alırsak (2.94) ile

$$\int_{\underline{G}} f \leq \int_{\underline{H}} (f \circ \Phi) |\det \Phi'| = \int_{\underline{G}} ((f \circ \Phi)(\Psi)) |\det \Phi'(\Psi)\Psi'| = \int_{\underline{G}} f.$$

Dolayısıyla

$$\int_{\underline{G}} f = \int_{\underline{H}} (f \circ \Phi) |\det \Phi'|. \quad (2.96)$$

Eğer $f \geq 0$ sınırlı fonksiyonu ayrıca sürekli ise (2.96)'daki fonksiyonlar integrellenebilir ve orada $\int$ yerine $\bar{\int}$ veya $\int$ alabiliriz. (2.92) her sabit fonksiyon için geçerlidir; bu sabit negatif de olabilir.

(b) $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ bir sınırlı fonksiyon olsun; $f \geq 0$ olması gerekmez! Bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sabitini $f + \alpha \geq 0$ olacak biçimde seçelim. $f_1 := f + \alpha$ ve $f_2 := \alpha$ dersek $f = f_1 + f_2$ olur. Bu durumda (2.96)'nın solundaki integral $\int_{\underline{G}} f = \int_{\underline{G}} (f_1 + f_2) = \int_{\underline{G}} f_1 + \int_{\underline{G}} f_2$ olur¹⁸. Benzeri bir eşitlik (2.96)'nın sağ yanı için de geçerlidir. Sonuçta (2.96) her sınırlı f için geçerlidir. Daima $\int_{\underline{G}} f = -\int_{\underline{G}} (-f)$ olduğundan (2.96), $\int$ yerine $\bar{\int}$ aldığımızda da geçerlidir. Kanıt tamamlanmıştır.¹⁹ ■

Koşullarımızı gevşetip bu teoremi biraz genelleştireceğiz.

Teorem 2.6.4 (Genel Dönüştürme Teoremi) $H \subset \mathbb{R}^n$ açık, Jordan ölçülebilir, $\Phi \in C^1(H, \mathbb{R}^n)$ birebir ve Lipschitz sürekli olsun. Bu koşullarda $G := \Phi(H)$ Jordan ölçülebilir ve her sınırlı $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$\int_G f(x) dx \equiv \int_{\Phi(H)} f = \int_H (\Phi \circ f) |\det \Phi'| \equiv \int_H (\Phi(f(u))) |\det \Phi'(u)| du. \quad (2.97)$$

¹⁸ $\int$ alt ve $\bar{\int}$ üstintegralleri genelde toplamsal değildirler. $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir ve $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonlar iseler $\int_A f + \int_A g \leq \int_A (f+g) \leq \int_A f + \bar{\int}_A g \leq \bar{\int}_A (f+g) \leq \bar{\int}_A f + \bar{\int}_A g$. Özellikle $g \in \mathcal{R}(A)$ ise $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$ ve $\bar{\int}_A (f+g) = \bar{\int}_A f + \bar{\int}_A g$.

¹⁹ X, Y metrik uzaylar, $D \subset X$ ve $f : D \rightarrow Y$ olsun. (a) f sürekli ve $\bar{D}$ 'ye $\hat{f}$ olarak sürekli genişletilebiliyorsa $\hat{f}$ tek olarak belirlidir. (b) $f : D \rightarrow Y$ düzgün sürekli ise $\bar{D}$ 'ye düzgün sürekli olarak genişletilebilir ve bu genişletme tek olarak belirlidir. Eğer f Lipschitz sürekli ise bu genişletme de aynı sabitle Lipschitz sürekli dir.

Burada f , ya daima $\int$, ya da daima $\bar{\int}$ alınacaktır. Özellikle f 'nin G 'de integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $(\Phi \circ f) |\det \Phi'|$ 'nin H 'de integrallenebilir olmasıdır ve bu durumda

$$\int_G f \equiv \int_{\Phi(H)} f = \int_H (\Phi \circ f) |\det \Phi'| \quad (\text{Dönüşüm Formülü}) \quad (2.98)$$

Kanıt. $L > 0$ sayısı Φ için bir Lipschitz sabiti ve $\alpha := (L\sqrt{n})^n$ olsun. $\Phi \in \mathcal{C}^1$ birebir ve Lipschitz sürekli olduğundan Φ 'ye ilişkin kısmi türevler sınırlıdır. β, γ sabitleriyle $|f| \leq \beta$ ve $|\det \Phi'| \leq \gamma$ olsun. $K := \{u \in H \mid \det \Phi'(u) = 0\}$ ise Φ 'nin kritik noktalarının kümesi olsun. Φ dönüşümü $H_1 := H \setminus K$ açık kümesinde bir $\mathcal{C}^1$ -eşyapı dönüşümüdür²⁰.

Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $H_{[p]} \subset H$ küpler toplamını $j_n(H \setminus H_{[p]}) < \varepsilon$ olacak biçimde seçelim. $k > p$ olmak üzere $H_{[p]}$ 'ye düşen k -küplerinin H_1 'e düşenlerinin birleşimi H'_k ve K 'yi kesenlerinin birleşimi ise H''_k olsun. Bu durumda $H_{[p]} = H'_k \sqcup H''_k$ olur. $H_{[p]}, H'_k, H''_k$ 'lerin Φ altındaki resimleri sırasıyla $G_{[p]}, G'_k, G''_k$ olsun. Önsav 2.2.21 ve Teorem 2.2.20'den dolayı G'_k Jordan ölçülebilir. $\det \Phi'$ fonksiyonu $H_{[p]}$ 'de düzgün süreklidir; dolayısıyla k yeterince büyük seçilirse $|\det \Phi'|$ 'nin H''_k 'de $< \varepsilon$ olması sağlanır. Sonuç 2.6.2'den $\bar{j}_n(G''_k) < \varepsilon j_n(H)$ ve Önsav 2.2.19'dan $\bar{j}_n(G \setminus G_{[p]}) < \alpha \varepsilon$ olur. Sonuçta

$$\begin{aligned} j_n(G'_k) &\leq \underline{j}_n(G) \leq \bar{j}_n(G) \leq j_n(G'_k) + \bar{j}_n(G''_k) + \bar{j}_n(G \setminus G_{[p]}) \\ &\leq j_n(G'_k) + \varepsilon(j_n(H) + \alpha) \end{aligned} \quad (2.99)$$

eşitsizliğine ulaşırız. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan G Jordan ölçülebilir.

Teorem 2.6.3'ten dolayı savımız H'_k için geçerlidir. (2.99)'dan dolayı ise $G \setminus G'_k$ 'nin ölçüsü $< \varepsilon(j_n(H) + \alpha)$ olur. Dolayısıyla f 'nin bu küme üzerindeki (alt, üst) integrali mutlak değerce $\beta \varepsilon(j_n(H) + \alpha)$ 'dan küçük olur. $F := (\Phi \circ f) |\det \Phi'|$ fonksiyonu mutlak değerce H''_k 'de $\beta \varepsilon$ ve $H_{[p]}$ 'de $\beta \gamma$ ile sınırlı olduğundan, bu kümeler üzerinde F 'nin integrali sırasıyla $\beta \varepsilon j_n(H)$ ve $\beta \gamma \varepsilon$ ile sınırlıdır. F 'nin H üzerindeki integrali H'_k, H''_k ve $H \setminus H_{[p]}$ üzerindeki integrallerinin toplamına ve f 'nin G üzerindeki integrali ise G'_k ve $G \setminus G'_k$ üzerindeki integrallerinin toplamına eşit olduğundan $\int_G f$ ve $\int_H F$ (alt, üst) integrallerinin farkı mutlak değerce, bir C sabiti ile, $C\varepsilon$ 'dan küçüktür. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan sav kanıtlanmıştır. ■

Sonuç 2.6.5 (Sard) $H \subset \mathbb{R}^n$ açık, Jordan ölçülebilir, $\Phi \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R}^n)$ ve Lipschitz sürekli ise Φ 'nin $K := \{x \in H \mid \det \Phi'(x) = 0\}$ kritik noktalarının $\Phi(K)$ resminin Jordan hacmi sıfırdır.

²⁰ $U, V \subset \mathbb{R}^n$ açık kümeler ve $f : U \rightarrow V$ $\mathcal{C}^k$ -sınıfından bir tameşleme olsun. f 'nin bir $\mathcal{C}^k$ eşyapı dönüşümü olması için gvyk U 'da daima $\det f'(x) \neq 0$ olmasıdır.

Kanıt. Gösterimler Teorem 2.6.4'ün kanıtındaki gibi olmak üzere $\Phi(K) \subset G_k''$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\bar{j}_n(G_k'') < \varepsilon j_n(H)$ olduğundan $j_n(\Phi(K)) = 0$ olur. ■

Önsav 2.2.21'den dolayı Φ dönüşümü $\bar{H}$ 'ye Lipschitz sürekli genişletilebilir. $A \subset \bar{H}$ Jordan ölçülebilir olsun. $A \setminus \mathring{A}$ sıfır hacimlidir; Önsav 2.2.19'dan dolayı ise $\Phi(A \setminus \mathring{A})$ sıfır hacimlidir. Bu bilgi ve Önsav 2.3.21 ile, Φ' 'yi tanımlı olmadığı $a \in \partial A$ noktalarında istediğimiz gibi açıklayarak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 2.6.6 Her Jordan ölçülebilir $B \subset \bar{H}$ için $A = \Phi(B)$ de Jordan ölçülebilir ve her sınırlı $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$\int_A f \equiv \int_{\Phi(B)} f = \int_B (f \circ \Phi) |\det \Phi'|. \quad (2.100)$$

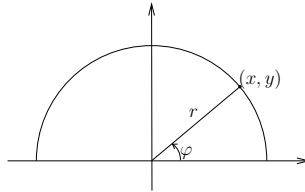
Burada f ya daima altintegral ya da daima üstintegrali gösterecektir. $f \equiv 1$ ile

$$j_n(A) \equiv j_n(\Phi(B)) = \int_B |\det \Phi'|. \quad (2.101)$$

Örnek 2.6.7. (1) Düzlemde kutupsal koordinatlar: $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü

$$\Phi(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad (2.102)$$

olarak tanımlansın. $(x, y) = \Phi(r, \varphi)$ dersek r tam da (x, y) noktasının orijine uzaklığı, φ ise $(0, 1)$ ve (x, y) vektörleri arasındaki yönelmiş açıdır; bu açı modulo 2π belirlidir. Φ dönüşümü $U := (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ açık kümesinden $V := \mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty) \times \{0\})$ açık



Şekil 2.10: $\mathbb{R}^2$ 'de kutupsal koordinatlar.

kümesine bir $\mathcal{C}^1$ -tameşlemedir.

$$\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}, \text{ dolayısıyla } \det \Phi'(r, \varphi) = r.$$

Φ dönüşümü U 'nun sınırlı altkümelerinde Lipschitz süreklidir. Açıkça $\Phi(\bar{U}) = \mathbb{R}^2$, ancak Φ dönüşümü $\bar{U}$ 'da birebir değildir. Yine de Sonuç 2.6.6'dan dolayı her Jordan ölçülebilir $B \subset \mathbb{R}^2$ ve her Riemann integrallenebilir $f : \Phi(B) \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$\int_{\Phi(B)} f(x, y) dx dy \equiv \int_{\Phi(B)} f = \int_B (f \circ \Phi) r = \int_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi dr.$$

Özel olarak $B = [0, R] \times [0, 2\pi]$ ve $f \equiv 1$ ise $\Phi(B) = \bar{B}_R$ olduğundan

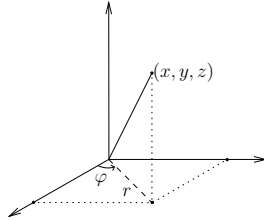
$$j_2(\bar{B}_R) = \int_{\bar{B}_R} 1 = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\varphi dr \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2.$$

$a, b > 0$ olmak üzere $(x, y) = \Psi(u, v) := (au, bv)$ ile tanımlanan $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü uv -düzlemindeki $\bar{B}_1$ kapalı kapalı dairecini (x, y) -düzlemindeki $E := (x, y) \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$ elipsine resmeder. Ψ teoreminin koşullarını sağlar ve $\det \Psi' = ab$ olduğundan E elipsinin alanı

$$j_2(E) = \int_{E=\Psi(\bar{B}_1)} 1 = \int_{\bar{B}_1} ab = ab j_2(\bar{B}_1) = ab\pi$$

olur.

(2) $\mathbb{R}^3$ 'te silindirik koordinatlar: $\mathbb{R}^3$ uzayında x, y, z koordinatları yerine, z koor-



Şekil 2.11: $\mathbb{R}^3$ 'te silindirik koordinatlar.

dinatını koruyup xy -düzleminde r, φ kutupsal koordinatlarına geçilir; bu bize

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) =: \Phi_S(r, \varphi, z) \quad (2.103)$$

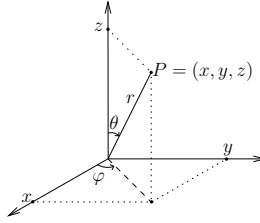
dönüşümünü verir. (r, φ, z) -uzayındaki $r = c$ düzlemlerine (x, y, z) -uzayında sonsuz silindirler karşılık gelir; sistemin ismi buradan gelir. U ve V bir önceki örnekteki kümeler olmak üzere $U' := U \times \mathbb{R}$ ve $V' := V \times \mathbb{R}$ olsun. $\Phi_S|_{U'} : U' \rightarrow V'$ bir $\mathcal{C}^1$ -eşyapı dönüşümüdür ve $\Phi_S(\bar{U}') = \mathbb{R}^3$. Kolayca $\det \Phi'_S = r$ olduğu görülür. Diğer yandan sınırlı kümelerde Φ_S Lipschitz süreklidir. Sonuç 2.6.6'dan dolayı her Jordan ölçülebilir $B \subset \mathbb{R}^3$ ve her Riemann integrallenebilir $f : \Phi_S(B) \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$\int_{\Phi_S(B)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Phi_S(B)} f = \int_B (f \circ \Phi_S) r = \int_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

(3) $\mathbb{R}^3$ 'te kutupsal (küresel) koordinatlar: $\mathbb{R}^3$ uzayında bize $P = (x, y, z)$ noktası verilsin, bkz. Şekil 2.12. P noktası uzayımızda, merkezi orijinde ve yarıçapı $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ olan küre yüzeyinde bulunur. z -ekseni ile $v = (x, y, z)$ vektörü arasındaki açıya θ dersek $z = r \cos \theta$ olur. (x, y) noktasının (x, y) -düzlemindeki kutupsal koordinatları $x = r \cos \varphi \sin \theta$ ve $y = r \sin \varphi \sin \theta$ olsun. (r, φ, θ) -uzayında

$$\Phi_K(r, \varphi, \theta) := (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) \quad (2.104)$$

olarak tanımlansın. $U := (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ ve $V := \mathbb{R}^3 \setminus ([0, +\infty) \times \{0\} \times \mathbb{R})$ olmak üzere $\Phi_K|_U : U \rightarrow V$ bir $\mathcal{C}^1$ -eşyapı dönüşümüdür; burada V kümesinin $\mathbb{R}^3$ uzayımızdan bir kapalı yarıdüzlem çıkarılarak elde edildiğine dikkat ediniz. $\Phi_K(\bar{U}) = \mathbb{R}^3$ ve Sonuç 2.6.6'nın koşulları sağlanır.

Şekil 2.12: $\mathbb{R}^3$ 'te küresel koordinatlar.

Dolayısıyla $B \subset \bar{U}$ Jordan ölçülebilirse $A = \Phi_K(B)$ de Jordan ölçülebilir ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrallenebilirse, kolayca görüleceği gibi $\det \Phi'_K(r, \varphi, \theta) = -r^2 \sin \theta$ olduğundan

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_A f = \int_B (f \circ \Phi_K) |\det \Phi'_K| = \int f(\Phi_K(r, \varphi, \theta)) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$$

olur. Özellikle $B = [\rho, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ kutusu $A = \{(x, y, z) | \rho^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ küresel kabuğuna resmedilir. Bu durumda

$$\int_A f = \int_\rho^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$$

olur. Özellikle f yalnızca $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 'nin bir fonksiyonu ise o zaman

$$\int_A f = \int_\rho^R f(r) r^2 dr \text{ olur.}$$

(4) $n \geq 3$ için $\mathbb{R}^n$ 'de kutupsal koordinatlar: $n \geq 3$ ve $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cdots \sin \theta_{n-2} \\ x_2 &= r \sin \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cdots \sin \theta_{n-2} \\ x_3 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cdots \sin \theta_{n-2} \\ x_4 &= r \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cdots \sin \theta_{n-2} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \cos \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} \\ x_n &= r \cos \theta_{n-2} \end{aligned}$$

olmak üzere $x := \Phi_n(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$ ile tanımlanan Φ_n dönüşümü $\mathcal{C}^1$ -sınıfındandır ve $Q := (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times ((0, \pi)^{n-2})$ açık kutusunu, $D_n := \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n \setminus D_n$ açık kümesine bir tameşlemeyle resmeder. Yine $\Phi_n : Q \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus D_n$ Sonuç 2.6.6'nın koşullarını sağlar ve her Jordan ölçülebilir $B \subset \bar{Q}$ ve her Riemann integrallenebilir $f : \Phi_n(B) \rightarrow \mathbb{R}$ için $\int_{\Phi_n(B)} f = \int_B (f \circ \Phi_n) |\det \Phi'_n|$ olur. Hesaplamalarla $|\det \Phi'_n| = r^{n-1} \sin \theta_1 (\sin \theta_2)^2 \cdots (\sin \theta_{n-2})^{n-2}$ olduğu görülür; sonuçta aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\int_{\Phi_n(B)} f = \int_B f(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) r^{n-1} \sin \theta_1 (\sin \theta_2)^2 \cdots (\sin \theta_{n-2})^{n-2} dr d\varphi d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2}.$$

İntegral solumuzda kalan bölgelerin alanlarını pozitif, sağımızda kalanların alanlarını ise negatif olarak hesaplar(bkz. Şekil 2.13).

$I = \langle a, b \rangle$ ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrallenebilir ise $\int_I f$ yerine

$$\int_a^b f, \int_a^b f dx, \int_a^b f(x) dx \equiv \int f(t) dt \equiv \dots$$

gösterimlerinden herhangi biri de kullanılır. $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n = b$ ise Önerme 2.3.22 (3) ile $\int_{a_0}^{a_n} f = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f$ olur. $\alpha, \beta \in [a, b]$ ve $\alpha > \beta$ ise

$$\int_{\alpha}^{\beta} f := - \int_{\beta}^{\alpha} f$$

olarak açıklanır. $\int_b^a f$ için bu kez gezimize x -ekseni üzerinde $(b, 0)$ -noktasından başlayıp $(a, 0)$ noktasına gider ve gezimize devam edersek, daha önce sağımızda (solumuzda) kalan bölgeler bu kez solumuzda (sağımızda) kalır; bu $\int_b^a f = - \int_a^b f$ tanımıyla uyumludur. $\alpha, \beta, \lambda \in [a, b]$ hangi sırada olursa olsunlar daima

$$\int_{\alpha}^{\lambda} f = \int_{\alpha}^{\beta} f + \int_{\beta}^{\lambda} f \quad (2.105)$$

olur.

Tanım 2.7.1 (1) $f \in \mathcal{R}(I)$ olsun. Her $x \in I$ için $F(x) := \int_a^x f$ olarak açıklanan F fonksiyonuna f 'nin **integral fonksiyonu** diyelim²¹.

(2) $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in I$ için $\exists G'(x) = f(x)$ ise G fonksiyonu I 'da f 'nin bir **ilkelidir** (veya bir **karşıtürevi** veya bir **kök fonksiyonu**) denir.

Eğer G, f 'nin $[a, b]$ 'de bir ilkeli ise I 'daki tüm ilkelleri $G + c, c \in \mathbb{R}$ fonksiyonlarıdır. f 'nin ilkelleri tanım gereği I 'da türevlenebilirler, ancak integral fonksiyonunun I 'da türevlenebilir olması gerekmez.

Teorem 2.7.2 (Anateorem I) $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrallenebilirse f 'nin

$$F(x) := \int_a^x f, x \in I \quad (2.106)$$

integral fonksiyonu I 'de Lipschitz süreklidir. Ayrıca f 'nin sürekli olduğu her x noktasında F türevlenebilir ve $F'(x) = f(x)$.²²

²¹Bu fonksiyona kimileri “**belirsiz integral**” der. Ancak “belirsiz integral” adını kimileri karşıt türevlerin kümesi için kullanır. Karışıklığa yol açmamak için yeni bir adlandırmayı yeğledik.

²²“Fundamental Theorem” kavramının karşılığı olarak niye “Anateorem”’i seçtiğimizi kısaca açıklayalım. Bugünün Türkiye’sinin aksine bir zamanlar kültürümüzde kadının yeri erkeğin yerinden çok önde olmalıdır. Bunun en güzel kanıtı dilimizdeki anayurt, anayasa, anayol, ana fikir, ana neden,... ve benzeri kelimelerdir. Bu yaklaşımın doğal uzantısı olarak “anateorem” seçilmiştir.

Kanıt. $f \in \mathcal{R}(I)$ olduğundan bir $M > 0$ ile her $x \in I$ için $|f(x)| \leq M$. Dolayısıyla (2.105) eşitliğinden

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| \\ &= \left| \int_a^x f + \int_x^y f - \int_a^x f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leq M |y - x| \end{aligned}$$

olur; öyleyse F Lipschitz süreklidir. $h \neq 0$ ve $c, c+h \in I$ için $f(c) = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(c)$ olduğundan

$$\varphi(h) := \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} (f(t) - f(c)) dt$$

olur. $|\varphi(h)| \leq \|f - f(c)\|_{[c, c+h]}$ olduğundan, eğer f fonksiyonu c 'de sürekli ise $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$, dolayısıyla $\exists F'(c) = f(c)$ olur. ■

Not. Herhangi bir türevlenebilir $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun f' türevinin Riemann integrallenebilir olması gerekmez. Örneğin $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(0) := 0$ ve $0 < x \leq 1$ için $f(x) := x^2 \cos \pi/x^2$ olarak açıklansın. f türevlenebilir. $f'(0) = 0$ ve $0 < x \leq 1$ için $f'(x) = 2x \cos \frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x^2}$. Sonuçta f' , I 'da sınırlı olmadığı için orada Riemann integrallenemez.

Teoreminizde F 'nin x 'te türevlenebilir olması için f 'nin x 'te sürekli olması bir *yeterli* koşuldur, ancak *gerekli koşul* değildir! Örneğin $I = [-1, 1]$ ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(0) = 1$ ve diğer noktalarda $f(x) \equiv 0$ olarak açıklansın. f fonksiyonu 0'da süreksizdir; ancak $F \equiv 0$ integral fonksiyonu 0'da da türevlenebilir! ▲

Sonuç 2.7.3 I 'da sürekli her f fonksiyonunun orada ilkelleri vardır ve G , f 'nin bir ilkelisi ise bir $c \in \mathbb{R}$ ile $G(x) = F(x) + c = \int_a^x f + c$.

Kanıt. Apaçık. ■

Bu sonuçta $G(a) = \int_a^a f + c = c$ olduğundan $G(x) - G(a) = \int_a^x f$ olur. $F(x) := \int_a^x f$ de f 'nin bir ilkelidir ve $G = F + c$.

$$\int f := F + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (2.107)$$

gösterimi yaygındır. $\int f$ 'ye f 'nin **belirsiz integrali** denir ve f 'nin ilkellerinin kümesi olduğu söylenir. Bu gösterim matematik açıdan doğru değilse de bir gelenektir ve sürdürülür.

Sonuç 2.7.4 *f 'nin F integral fonksiyonu hemen her yerde türevlenebilir ve türevi hemen her yerde f' 'ye eşittir.*

Kanıt. $f \in \mathcal{R}(I)$ olduğundan f hemen her yerde süreklidir ve bu, savı verir. ■

Teorem 2.7.5 (Anateorem II) *F fonksiyonu $I = [a, b]$ aralığında türevlenebilir ve F' , I 'da Riemann integrallenebilirse*

$$[F]_a^b := F(b) - F(a) = \int_a^b F'$$

ve her $c, x \in I$ için

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'.$$

Kanıt. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ olmak üzere

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})).$$

Ortalama Değer Teoremi'nden $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ sayıları ile

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (2.108)$$

$I_k = \langle x_{k-1}, x_k \rangle$ ve $\mathcal{Z} = \{I_k\} \in \mathfrak{Z}(I)$ olmak üzere (2.108)'de en sağdaki terim $R(F', \mathcal{Z}(\xi))$ Riemann toplamıdır. $F' \in \mathcal{R}(I)$ olduğundan $\|\mathcal{Z}\| \rightarrow 0$ ile limite geçerse $F(b) - F(a) = \int_I F' \equiv \int_a^b F'$. Savın kalanı buradan çıkar. ■

Anateorem II, **Karşıtürev Teoremi**, veya **İlkel Teoremi** olarak da adlandırılır. $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ için g integrallenebilirse $(Ig)(x) := \int_a^x g$ ve h türevlenebilirse $Th := h'$ diyelim. Anateorem I, sürekli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ için $TI f = f$ olduğunu, Karşıtürev Teoremi ise sürekli türevlenebilir $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ için $IT f = f$ olduğunu söyler. Bu nedenle integral ve türev zıt işlemlerdir denir.

Uyarı: $I = [-1, 1]$ ve her $n \in \mathbb{N}^*$ için $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ ($x \in I$) olsun.

Her $x \in I$ için $f(x) := |x|$ olsun. Her f_n türevlenebilir, $f_n \xrightarrow{I} f$, ancak f fonksiyonu I 'da türevlenemez! Türevlenebilir fonksiyonların düzgün yakınsak limitlerinin de türevlenebilir olmasını garantilemek için ek koşullar gereklidir!

Teorem 2.7.6 (Terim terim türev alma) *$I = [a, b]$, $(f_n) \subset \mathcal{C}^1(I)$ ve her $x \in I$ için $\exists \lim f_n(x) =: f(x)$ olsun. Eğer ayrıca $f'_n \xrightarrow{I} g$ ise $f \in \mathcal{C}^1(I)$ ve $f' = g$.*

Kanıt. $g \in \mathcal{C}(I)$. Sonuç 2.4.13 ve Teorem 2.7.5 ile her $x \in I$ için

$$G(x) := \int_a^x g = \int_a^x \lim f'_n = \lim \int_a^x f'_n = \lim (f_n(x) - f(a)) = f(x) - f(a).$$

Teorem 2.7.2'den G türevlenebilir, dolayısıyla f türevlenebilir ve $G' = g = f'$. ■

Sonuç 2.7.7 $I = [a, b]$, $(f_n) \subset \mathcal{C}^1(I)$ ve her $x \in I$ için $\exists \lim \sum f_n(x) =: f(x)$ olsun. Eğer ayrıca $\sum f'_n$, I 'da düzgün yakınsak ise $f \in \mathcal{C}^1(I)$ ve $f' = \sum f'_n$.

Teorem 2.7.8 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ bir kapalı aralık, $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}^1(I)$ ve bir $c \in I$ için $\sum_{n \geq 1} f_n(c)$ yakınsak olsun. Eğer $\sum_{n \geq 1} f'_n \xrightarrow{I} g$ ise $\sum_{n \geq 1} f_n$ serisi I 'da bir $f \in \mathcal{C}^1$ fonksiyonuna yakınsar ve $f' = g$.

Kanıt. g süreklidir ve Sonuç 2.4.13 ile her $x \in I$ için

$$\int_c^x g = \sum_{n \geq 1} \int_c^x f'_n = \sum_{n \geq 1} (f_n(x) - f_n(c)).$$

Bu ve $\sum_{n \geq 1} f_n(c)$ 'nin yakınsaklığından her $x \in I$ için $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ serisinin yakınsaklığı çıkar. Bu serinin toplamı $f(x)$ olsun. Yukarıdaki eşitlikten

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g$$

olur. Karşıtürev teoremindense $f' = g$. İşimiz biter. ■

Ne kadar çok fonksiyonun ilkelini biliyorsak integral alma işimiz o kadar kolaylaşır. Aşağıda sıkça karşılaşılan bazı temel f fonksiyonları ve F ilkelleri listelenmiştir.

$f(x)$	$F(x)$	Notlar
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, k < 0$ ise $x \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x \in \mathbb{R}^*$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \in (0, +\infty)$
a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x$	$a > 0$
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$	$\lambda \neq 0$
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \notin (2\mathbb{Z} + 1)\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$x \notin \mathbb{Z}\pi$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Arsinh} x$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arcosh} x$	$x \in (1, +\infty)$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{Artanh} x$	$-1 < x < 1$

Örnek 2.7.9. $\arctan x$ 'in $x = 0$ noktasındaki seri açılımını bulalım. $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$ ve $\arctan 0 = 0$ olduğundan

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Diğer yandan

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k} \quad t \in (-1, 1).$$

Bu seri her $0 < r < 1$ için $[-r, r]$ 'de düzgün yakınsak olduğundan (2.4.13) ile

$$\arctan x = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k} \right) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Bu açılım $[-r, r]$ 'de geçerlidir; $r \uparrow 1$ ile $(-1, 1)$ 'de geçerli olur.

Teorem 2.7.10 (Kısmi İntegrasyon) $I = [a, b]$ ve $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir ve $f', g' \in \mathcal{R}(I)$ ise

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx \equiv \int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g \equiv [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \quad (2.109)$$

$f, g \in \mathcal{C}^1(I)$ ise teoremin koşulları sağlanır.

Kanıt. f, g türevlenebilir ise f, g sürekli, dolayısıyla integrallenebilir. Öyleyse $f'g + fg' \in \mathcal{R}(I)$. Sav, Karşıtürev Teoremi ve $(fg)' = f'g + fg'$ eşitliğinden çıkar. ■

(2.109) eşitliği (2.107) ile $\int fg' = fg - \int f'g$ şeklini alır.

Örnek 2.7.11. (1) $f(x) = x$ ve $g(x) = e^x$ için

$$\int_a^b xe^x dx = [xe^x]_a^b - \int_a^b e^x dx = [xe^x]_a^b - [e^x]_a^b = e^b(b-1) - e^a(a-1).$$

(2) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$ ve $a, b \in (0, +\infty)$ için

$$\int_a^b \ln x dx = [x \ln x]_a^b - \int_a^b dx = b(\ln b - 1) - a(\ln a - 1).$$

(3)

$$\begin{aligned} \int \arctan x dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \sin x \cdot (-\cos x)' dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx \implies \\ \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(5) **Bir Uygulama:** Bir f 'nin

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x) =: T_f^n(x) + R_{n+1}(x)$$

Taylor açılımındaki $R_{n+1}(x)$ kalanı için

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (2.110)$$

olduğunu göstereceğiz. $n = 0$ için (2.110)

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

şeklini alır ki bu Karşıtürev Teoremi ile doğrudur. Savımız n için kanıtlanmış olsun. O zaman

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt = -\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x \left(\frac{d}{dt} (x-t)^n \right) f^{(n)}(t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{n!} (x-t)^n f^{(n)}(t) \right]_{x_0}^x + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{n!} (x-x_0) f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt, \text{ dolayısıyla} \end{aligned}$$

$$f(x) = T_f^{n-1}(x) + R_n(x) = T_f^n(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

(6) Yineleme formülleri: Bazen bir parametre içeren integraller için yineleme formülleri elde etme şansımız vardır. Örneğin $n \in \mathbb{N}$ için $I_n = \int \sin^n x dx$ belirsiz integralini hesaplayalım. Kısmi integrasyonla $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} I_n &= - \int \sin^{n-1} x d(\cos x) dx \\ &= - \cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\ &= - \cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\ &= - \cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \end{aligned}$$

Bu eşitlikten I_n çekilirse $n \geq 2$ için

$$I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (2.111)$$

elde ederiz. $I_0 = \int \sin^0 x dx = x$ ve $I_1 = \int \sin x dx = -\cos x$ olduğundan (2.111) yineleme formülü ile her I_n hesaplanır. Bu formülden yararlanarak her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ değerlerini hesaplayalım. $\alpha_0 = \pi/2$, $\alpha_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $\alpha_n = \frac{n-1}{n} \alpha_{n-2}$ elde ederiz. Sonuçta

$$\alpha_{2n} = \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha_{2n+1} = \frac{2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2n+1) (2n-1) \cdots 5 \cdot 3}.$$

Bu değerler ileride kürelerin hacim hesaplarında karşımıza çıkacaklar.

Lemma 2.7.12 $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ bir tameşleme, $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ ve φ^{-1} bir Lipschitz fonksiyonu olsun. $f \in \mathcal{R}([a, b])$ ise $f \circ \varphi \in \mathcal{R}([c, d])$.

Kanıt. Bir $K > 0$ ile her $s, t \in [a, b]$ için $|\varphi^{-1}(s) - \varphi^{-1}(t)| \leq K|s - t|$ olsun. Kapalı aralıklar arasındaki her sürekli tameşleme topolojiktir; dolayısıyla φ de süreklidir. f 'nin süreksizlik noktalarının kümesi S_f ise, $f \circ \varphi$ 'nin süreksizlik noktalarının kümesi $\varphi^{-1}(S_f)$ 'dir.

$\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. S_f kümesini I_n açık aralıklarıyla $\sum_{n \geq 0} v_1(I_n) < \varepsilon/K$ olacak biçimde örtebiliriz. Bu durumda $I'_n := \varphi^{-1}(I_n)$ aralıkları $\varphi^{-1}(S_f)$ kümesini örter ve

$$\sum_{n \geq 0} v_1(I'_n) \leq \sum_{n \geq 0} K v_1(I_n) < \varepsilon.$$

Dolayısıyla $\varphi^{-1}(S_f)$ bir sıfır kümesidir; öyleyse $f \circ \varphi \in \mathcal{R}([c, d])$. ■

Lemma 2.7.13 $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ fonksiyonu $\mathcal{C}^1$ -eşyapı dönüşümü ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $f \in \mathcal{R}([a, b])$ ise $f \circ \varphi \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$.

Kanıt. Gbk $\varphi' > 0$ varsayabiliriz. φ' ayrıca sürekli olduğundan bir $K > 0$ ile her $t \in [\alpha, \beta]$ için $\varphi'(t) \geq K$ sağlanır. Ortalama Değer Teoremi'nden, $\alpha \leq u < v \leq \beta$ koşulunu sağlayan her u, v için u, v arasında bir θ

$$\varphi(u) - \varphi(v) = \varphi'(\theta)(u - v)$$

olacak biçimde bulunur. O zaman $|\varphi(u) - \varphi(v)| \geq K(u-v)$ olur. Dolayısıyla $u = \varphi^{-1}(s)$ ve $v = \varphi^{-1}(t)$ ise $|\varphi^{-1}(s) - \varphi^{-1}(t)| \leq K^{-1}|s - t|$ olur. φ^{-1} bir Lipschitz fonksiyonudur ve Önsav 2.7.12 ile $f \circ \varphi \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ olur. ■

Teorem 2.7.14 (Değişken Değiştirme I) $I = [a, b]$, $J = [\alpha, \beta]$ ve $\varphi : J \rightarrow I$ dönüşümü $\mathcal{C}^1$ -sınıfından bir tameşleme ve her $t \in (a, b)$ için $\varphi'(t) \neq 0$ olsun. Bu koşullarda her $f \in \mathcal{R}(I)$ için $(f \circ \varphi)\varphi' \in \mathcal{R}(J)$ ve

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'. \quad (2.112)$$

Kanıt. İki kanıt vereceğiz. Durumuzda $\det \varphi' = \varphi'$ olur.

(a) Teorem 2.6.4'ten dolayı $\int_I f = \int_J (f \circ \varphi) |\varphi'|$. Koşullarımızdan ya daima $\varphi'(t) > 0$ ya da daima $\varphi'(t) < 0$ olur. İlk durumda $|\varphi'| = \varphi'$ ve $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$ olduğundan

$$\int_a^b f = \int_I f = \int_J (f \circ \varphi) |\varphi'| = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'$$

olur. $\varphi' < 0$ durumunda $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$ ve $|\det \varphi'| = -\varphi'$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f &= - \int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f = - \int_{[a,b]} f = - \int_J (f \circ \varphi) |\varphi'| \\ &= - \int_J (f \circ \varphi)(-\varphi') = \int_J (f \circ \varphi)\varphi' = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'. \end{aligned}$$

(b) Genelde karşılaştığımız kanıtı $\varphi' > 0$ için verelim. Önsav 2.7.13'ten dolayı $f \circ \varphi \in \mathcal{R}(J)$ ve φ' , sürekli olduğundan, integrallenebilir; sonunda $(f \circ \varphi)\varphi'$ integrallenebilir. J 'nin herhangi bir $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ parçalanışı, $x_k := \varphi(t_k)$ olmak üzere I 'nın bir $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ parçalanışını verir. Bu parçalanışlara sırasıyla $\mathcal{Z}$ ve $\mathcal{Z}^*$ diyelim. Aradeğer Teoremi ile $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ noktalarını

$$\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

olacak biçimde seçelim. $\eta_k := \varphi(\xi_k)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f, \mathcal{Z}^*(\eta)) &= \sum_{k=1}^n f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n f(\varphi(\xi_k))\varphi'(\xi_k)(\xi_k - \xi_{k-1}) = \mathcal{R}((f \circ \varphi)\varphi', \mathcal{Z}(\xi)) \end{aligned}$$

olur. φ bir $\mathcal{C}^1$ -eşyapı dönüşümü olduğundan $\|\mathcal{Z}_n\| \rightarrow 0$ ise $\|\mathcal{Z}^*\| \rightarrow 0$ olur. Yukarıdaki eşitlikte $\|\mathcal{Z}_n\| \rightarrow 0$ için limite geçerse savımız elde edilir. ■

Teoremdaki özelliklere sahip $\varphi : J \rightarrow I$ dönüşümlerine **parametre dönüşümü** denir. (2.112) eşitliğini şu şekilde yazmak daha aydınlatıcıdır:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt. \quad (2.113)$$

Burada ilk kez $\int_a^b f$ yerine kullandığımız $\int_a^b f(x)dx$ ve $dx = \varphi'(t)dt$ Leibniz yazılımlarının, akılda tutma bağlamında, faydalarını görüyoruz. (2.113) eşitliği şunu söylüyor: $\int_a^b f(x)dx$ ifadesinde, biçimsel olarak, x yerine $\varphi(t)$ ve dx yerine $\varphi'(t)dt$ yaz! Bu nedenle teoreminize genelde verilen ad **Yerine Koyma Teoremi**'dir.

Teorem 2.7.15 (Değişken Değiştirme II) $I = [a, b]$, $J = [\alpha, \beta]$ ve $\varphi : J \rightarrow I$ dönüşümü $\mathcal{C}^1$ -sınıfından olsun. Her sürekli $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ için $(f \circ \varphi)\varphi' \in \mathcal{R}(J)$ ve

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f \equiv \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \equiv \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Kanıt. $(f \circ \varphi)\varphi'$ sürekli olduğu için $(f \circ \varphi)\varphi' \in \mathcal{R}(J)$. Ayrıca f sürekli olduğundan I 'da karşı türevleri vardır; F bunlardan biri olsun. Bu durumda $F \circ \varphi$ sürekli türevlenebilir ve Zincir Kuralı ile

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

olur. Bu ve (2.7.5) Karşıtürev Teoremi ile

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = [F \circ \varphi]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx. \quad (2.114)$$

(2.114) eşitliği iki yönlü kullanılabilir; soldan sağa veya sağdan sola. Bize bir $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiştir ve $\int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt$ 'yi hesaplamamız istenmiştir. O zaman işimiz, bir I aralığı ve orada tanımlı ve integralini kolayca alabileceğimiz bir f fonksiyonunu ve $\mathcal{C}^1$ -sınıfından bir $\varphi : J \rightarrow I$ parametre dönüşümünü $h(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ olacak biçimde aramaktır. Ya da bizden $[a, b]$ aralığından integrallenebilir bir f için $\int_a^b f(x)dx$ 'i hesaplamamız istenmiştir. O zaman işimiz, bir $[\alpha, \beta]$ aralığında tanımlı uygun bir φ parametre dönüşümünü, $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 'nin bir ilkelini kolayca bulacak biçimde belirlemektir.

Örnek 2.7.16. (1) Yarıçapı r olan bir D dairesinin alanını hesaplayalım. Alan ötelemeye göre değişmez olduğundan gbk merkezini orijinde alabiliriz. Dairemizin üst yarıdüzlemdeki kısmına D^+ dersek, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$ olmak üzere, Teorem 2.3.19 (2) ile

$$j_2(D^+) = j_2([0, f]) = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

olur. $J = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ve $\varphi(t) = r \sin t$ olsun. $\varphi : J \rightarrow [-r, r]$ sürekli türevlenebilir, $\varphi(-\frac{\pi}{2}) = -r$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = r$ ve f sürekli olduğundan (2.7.15) ile (J' 'de $\cos t \geq 0$!)

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t dt.$$

Örnek 2.7.11 (4)'teki yöntemle $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$ kolayca görülür. $j_2(D^+) = \frac{\pi}{2} r^2$, dolayısıyla $j_2(D) = 2j_2(D^+) = \pi r^2$ olur. (2.114), sağdan sola kullanılmıştır.

(2) $\int_{\alpha}^{\beta} \sin(\sin t) \cos t dt = ?$ Şimdi $f(x) := \sin x$ ve $x = \varphi(t) = \sin t$ alırsak

$$\sin(\sin t) \cdot \cos t = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

olduğundan (2.114) ile

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin(\sin t) \cdot \cos t dt = \int_{\sin \alpha}^{\sin \beta} \sin x dx = [-\cos x]_{\sin \alpha}^{\sin \beta}$$

olur. Burada (2.114), soldan sağa kullanılmıştır.

$\mathcal{E}$, toplama, çarpma, tanımlı olduğu sürece bölme ve bileşime göre kapalı olup tüm sabit fonksiyonları, x^r ($r \in \mathbb{R}$), e^x , $\ln x$ ve tüm trigonometrik fonksiyonları ve terslerini içeren en dar fonksiyon ailesi olsun. $\mathcal{E}$ 'nin ögelelerine temel fonksiyonlar diyelim. $\mathcal{E}$ ailesi türev altında kapalıdır, dd $f \in \mathcal{E}$ ise $f' \in \mathcal{E}$. Ancak $\mathcal{E}$ integral altında kapalı değildir. Örneğin hepsi de uygulamalı matematikte çok önemli olan

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{ve} \quad \int \cos(x^2) dx$$

fonksiyonlarının hiçbirisi temel fonksiyon değildir. İntegral fonksiyonları fonksiyon dağarcığımızı zenginleştirir. Her matematikçi yaklaşık olarak aynı oranda iyi türev alabilirken, iş integral almaya gelince durum değişir; bazıları diğerlerinden daha iyi integral alabilir. Artık integral tabloları var. İntegral alma yöntemlerini daha fazla uzatmayıp, kısaca rasyonel fonksiyonların integrallerine değinip, bu konuyu noktalayacağız.

Rasyonel fonksiyonların integralleri: $p, q \in \mathbb{R}[x]$ polinomları ile $r = p/q$ rasyonel fonksiyonu verilsin. $\int r'$ 'yi bulmak istiyoruz. Eğer $\text{grad } p > \text{grad } q$ ise kalanlı bölme teoremi, bir p_0 polinomu ve $\text{grad } p_1 < \text{grad } q$ koşulunu bir p_1 polinomu ile $r = p_0 + p_1/q$ olduğun söyler. Polinomların integralini kolayca bulabiliyoruz. $\int r'$ 'yi bulmak için $\int p_1/q$ tipindeki belirsiz integralleri bulmak yeterlidir.

Şimdi p/q rasyonel fonksiyonu verilsin ve $\text{grad } p < \text{grad } q$ olsun. Cebir dersinde n . dereceden kompleks katsayılı her polinomunun, katlılıklarıyla sayılmak üzere n kökü olduğu kanıtlanır. $\text{grad } q = n$ olsun. Dolayısıyla $q \in \mathbb{R}[x]$ reel katsayılı bir polinom ise onun da, katlılıklarıyla sayılmak üzere n kökü vardır; bu köklerden bazıları kompleks olabilir. Eğer bir $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ için $q(a) = 0$ ve $q(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$ ise,

$$0 = \overline{q(a)} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i a^i} = \sum_{i=0}^n a_i (\bar{a})^i = q(\bar{a})$$

olur: a kompleks sayısı q 'nin bir kökü ise $\bar{a}$ da bir köktür. $a \notin \mathbb{R}$ olduğundan, $\beta \neq 0$ olmak üzere α, β gerçel sayıları ile $a = \alpha + i\beta$ olur. Basit bir hesaplamayla

$$(x - a)(x - \bar{a}) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 =: x^2 + 2bx + c, \quad b < c$$

olduğu kolayca görlür. $x^2 + 2bx + c$ polinomu $\mathbb{R}[x]$ 'te parçalanamaz.

q 'nin birbirinden farklı reel kökleri $a_1, \dots, a_k$ ve bunların katlılıkları $r_1, \dots, r_k$ olsunlar. Bu durumda bir $c \in \mathbb{R}$ sabiti ve $q_\mu(x) = (x - \alpha_\mu)^2 + \beta_\mu^2 \in \mathbb{R}[x]$ ($\beta_\mu \neq 0$, $\mu = 1, \dots, l$) polinomları ile

$$q(x) = c \cdot \prod_{\nu=1}^k (x - a_1)^{r_\nu} \cdot \prod_{\mu=1}^l (q_\mu(x))^{s_\mu}.$$

Burada k, r_ν, l, s_μ 'ler doğal sayılardır. Cebirden ödünç alarak

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{\nu=1}^k \sum_{i=1}^{r_\nu} \frac{a_{i\nu}}{(x - a_\nu)^i} + \sum_{j=1}^{s_\mu} \frac{b_{j\mu}x + c_{j\mu}}{[(x - \alpha_\mu)^2 + \beta_\mu^2]^j}, \quad \beta_\mu \neq 0 \quad (2.115)$$

yazabiliriz. Herhangi bir rasyonel fonksiyonun integralini almak, aşağıdaki tipten rasyonel fonksiyonların integrallerinin alınmasına indirgenir: $n \in \mathbb{N}^*$ için

$$(a) \int \frac{dx}{(x - a)^n},$$

$$(b) \int \frac{rx + s}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^n} dx, \quad \beta \neq 0.$$

Bunlardan (a)'yı biliyoruz: $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere a 'yı içermeyen her aralıkta

$$\int \frac{dx}{x - a} = \ln |x - a| + c$$

$$\int \frac{dx}{(x - a)^n} = \frac{1}{1 - n} (x - a)^{1-n} + c, \quad n > 1.$$

Diğer yandan, $\beta \neq 0$ olduğundan, $x - \alpha = \beta t$ değişken değişimi ile

$$\begin{aligned} \int \frac{rx + s}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx &= \int \frac{r(\alpha + \beta t) + s}{\beta^2 t^2 + \beta^2} \beta dt = r \int \frac{t}{t^2 + 1} dt + \frac{r\alpha + s}{\beta} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \frac{r}{2} \ln(t^2 + 1) + \frac{r\alpha + s}{\beta} \arctan t \\ &= \frac{r}{2} \ln \frac{(x - \alpha)^2 + \beta^2}{\beta^2} + \frac{r\alpha + s}{\beta} \arctan \frac{x - \alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

Şimdi $n \geq 2$ olsun. Aynı değişken değişimi ile

$$\begin{aligned} \int \frac{rx + s}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^n} dx &= \int \frac{r(\alpha + \beta t) + s}{[\beta^2 t^2 + \beta^2]^n} \beta dt \\ &= \frac{r}{\beta^{2n-2}} \int \frac{t dt}{(t^2 + 1)^n} + \frac{r\alpha + s}{\beta^{2n-1}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n} \\ &= \frac{r}{2\beta^{2n-2}} \cdot \frac{1}{-n + 1} \cdot \frac{1}{(t^2 + 1)^{n-1}} + \frac{r\alpha + s}{\beta^{2n-1}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}. \end{aligned}$$

Böylece işimiz

$$I_n(t) := \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}$$

integralini bulmaya kalmıştır.

$$I_n(t) = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n} = \int \frac{1 + t^2 - t^2}{(t^2 + 1)^n} dt = I_{n-1}(t) - \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)^n} dt. \quad (2.116)$$

Şimdi (2.116)'da en sağdaki integrali ele alalım.

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)^n} dt &= \int \frac{t}{2} \frac{2t}{(t^2 + 1)^n} dt \\ &= \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{-n + 1} \cdot \frac{1}{(t^2 + 1)^{n-1}} - \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-n + 1} \cdot \frac{1}{(t^2 + 1)^{n-1}} dt \\ &= \frac{t}{(2 - 2n)(t^2 + 1)^{n-1}} + \frac{1}{2n - 2} I_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Bu ifadeyi (2.116)'da yerine koyarsak

$$I_n(t) = \frac{t}{(2n - 2)(t^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2n - 2} I_{n-1}(t)$$

elde ederiz. Bu bir indirgeme ilişkisidir. Sonlu adımda, hesapladığımız bir $f(t)$ fonksiyonu ve bir $a \in \mathbb{R}$ sabiti ile $I_n(t) = f(t) + aI_1(t)$ olur. Ancak $I_1(t) = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t$ olduğundan

$$I_n(t) = f(t) + a \arctan t$$

olur ve işimiz biter.

Son olarak iki basit örnekle (2.115) eşitliğindeki parçalanışı nasıl bulduğumuza da değinelim.

Örnek 2.7.17. (1) $\int \frac{1}{x^3-x^2} dx = \int \frac{1}{x^2(x-1)} dx = ?$

(a) **Belirsiz katsayılar yöntemi:** Bu yöntemde cebirden şu bilgiye başvururuz; İki polinomun birbirine eşit olması için gvyk karşılıklı katsayıların birbirine eşit olmasıdır. 0 ve 1'i içermeyen her aralıkta

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} \quad (2.117)$$

Her iki yanı $x^2(x-1)$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} 1 &= ax(x-1) + b(x-1) + cx^2 = (a+c)x^2 + (b-a)x - b \implies \\ 0 &= a+c, \quad 0 = b-a \text{ ve } 1 = -b \implies a = b = -1, \quad c = 1. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Böylece

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)} = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

(b) **Limit yöntemi:** (2.117) eşitliğinin her iki yanını x^2 ile çarpalım:

$$\frac{1}{x-1} = ax + b + \frac{cx^2}{x-1}. \quad (2.119)$$

İki yanını $x \rightarrow 0$ için limitini alırsak $-1 = b$ olur. (2.117)'yi $x-1$ ile çarpalım:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{a(x-1)}{x} + \frac{b(x-1)}{x^2} + c.$$

$x \rightarrow 1$ limitine geçerse $c = 1$ olur. (2.117)'yi x ile çarpalım:

$$\frac{1}{x(x-1)} = a + \frac{b}{x} + \frac{cx}{x-1}.$$

$x \rightarrow +\infty$ limitine geçerek $0 = a + c = a + 1$, sonuçta $a = -1$ elde ederiz.

(c) **Özel değerler yöntemi:** x değişkenine özel değerler vererek katsayılar için bir doğrusal denklem sistemi elde edilir ve bu çözülür. Örneğin (2.118)'den $x = 0$ için $b = -1$, $x = 1$ için $c = 1$ olur. Son olarak $x = 2$ ile $1 = 2a + b + 4c = 2a - 1 + 4$ ve buradan $a = -1$ elde edilir.

(2) $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{x^4-1} dx = ?$ Şimdi $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ olduğundan

$$\frac{x^3+2x^2+x-1}{x^4-1} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x-1} + \frac{b+cx}{x^2+1}$$

parçalanışından belirsiz katsayılar yöntemiyle $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{2}$ ve $c = 0$ elde edilir. Böylece ± 1 'i içermeyen her aralıkta

$$\begin{aligned} \frac{x^3+2x^2+x-1}{x^4-1} &= \frac{1/4}{x+1} + \frac{3/4}{x-1} + \frac{3/2}{x^2+1} \\ \int \frac{x^3+2x^2+x-1}{x^4-1} dx &= \frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{3}{2} \arctan x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.8 Mutlak İntegrallenebilirlik ve Özdeş İntegral-ler²³

Not. Şimdiye kadar değişmeyen iki koşulumuz oldu: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir, dolayısıyla *sınırlı* ve $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir *sınırlı fonksiyon*dur. Şimdi bu koşullardan birini veya ikisini terk ettiğimizde de bazı durumlarda $\int_{\Omega} f$ integralinden bahsedebileceğiz.

$A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir alt küme ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. A 'nın Jordan ölçülebilir veya sınırlı olması gerekmez; aynı biçimde f 'nin Riemann integrallenebilir veya sınırlı olması gerekmez. Bu tip fonksiyonlar için önce “*mutlak integrallenebilirlik*” kavramını açıklayacağız. “Mutlak integrallenebilir” (absolutely integrable) yerine yaygın olarak “*özdeş integralenebilir*” (improper integrals) adlandırması da kullanılır. Ancak biz özdeş integral kavramını yalnızca $n = 1$ için açıklayacak ve kullanacağız. Bu genellelikle $\mathbb{R}$ 'de Riemann integralinden sonra açıklanan ve yaygın olarak bilinen kavramdır. İkisi arasındaki temel fark şudur: f 'nin mutlak integrallenebilir olması $|f|$ 'nin mutlak integrallenebilir olmasına denk iken, f özdeş integrallenebilirken $|f|$ 'nin özdeş integrallenebilir olması gerekmez! ▲

2.8.1 Mutlak İntegrallenebilir Fonksiyonlar

$A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir altküme olsun. A 'nın sınırsız olabileceğini ayrıca belirtelim. Jordan ölçülebilir $A_k \subset A$ kümeleri için daima $A_k \subset A_{k+1}$ ve $A = \bigcup_{k \geq 0} A_k$ ise, $\{A_k\}$ ailesi A 'yı **tüketir** diyelim. Örneğin $\{B_k\}$ toplarının ve $K_k = [-k, k] \times \cdots \times [-k, k]$ olmak üzere $\{K_k\}$ küplerinin aileleri $\mathbb{R}^n$ 'i tüketirler. A Jordan ölçülebilir ve $a \in \bar{A}$ ise $k \in \mathbb{N}^*$ için $A_k := A \setminus B_{1/k}(a)$ olmak üzere $\{A_k\}$ ailesi A 'yı tüketir.

Lemma 2.8.1 $A \in \mathcal{J}^n$, $f \in \mathcal{R}(A)$ ve $\{A_k\}$ ailesi A 'yı tüketiyorsa

$$\lim_k j_n(A_k) = j_n(A) \text{ ve } \lim_k \int_{A_k} f = \int_A f.$$

Kanıt. Savın ilk kısmı Sonuç 2.2.16'dan çıkar. A Jordan ölçülebilir olduğundan ∂A sıfır hacimlidir. Pozitif sayıların (ε_k) dizisini $\varepsilon_k \searrow 0$ olacak biçimde seçelim. F_k figürlerini $\partial A \subset F_k$ ve $j_n(F_k) < \varepsilon_k$ olacak biçimde seçelim. 2.2.16(ii)'de $B_k := A_k$ ve $C_k := A$ alırsak $C_k \setminus B_k = A \setminus A_k \subset F_k$, $0 \leq \lim j_n(A \setminus A_k) \leq \lim j_n(F_k) = 0$ olur. Önsavımızdan $\lim_k j_n(A_k) = j_n(A)$.

²³İngilizce “improper integrals”, almanca “uneigentliche Integrale”, fransızca “intégrales impropres”. Bizde genelde “has olmayan integraller” olarak geçer. Seçtiğimiz adlandırmanın daha iyi olduğunu düşünüyoruz.

Diğeri

$$\left| \int_A f - \int_{A_k} f \right| = \left| \int_{A \setminus A_k} f \right| \leq \|f\| j_n(A \setminus A_k)$$

eşitsizliğinden çıkar. ■

Şimdi $A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. A 'nın herhangi bir $\{A_k\}$ tüketimine, her k için $f|_{A_k} \in \mathcal{R}(A_k)$ ise f 'ye **uygundur** diyelim. $A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. A 'nın f 'ye uygun her $\{A_k\}$ tüketimi için $\left(\int_{A_k} f\right)$ dizileri aynı α sayısına yakınsaksa f fonksiyonu A 'da **mutlak integrallenebilir** ve $\int_A f$ **integrali yakınsaktır** denir ve $\int_A f = \alpha$ yazılır. Diğer durumlarda $\int_A f$ **ıraksaktır** denir.

Eğer bu tanımda A Jordan ölçülebilir ve $f \in \mathcal{R}(A)$ ise, Önsav 2.8.1'den dolayı, f mutlak integrallenebilir ve yeni $\int_A f$ tanımı eskisiyle örtüşür.

Not 2.8.2 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve f 'ye uygun $\{A_k\}$ ailesi A kümesini tüketsin. $\left(\int_{A_k} f\right)$ dizisi α 'ya yakınsak olsun. $F_0 := A_0$ ve $k \geq 1$ için $F_k := A_k \setminus A_{k-1}$ olsun. $\{F_k\} \subset \mathcal{J}^n$ ailesi ayrıktır ve $A_k = \bigsqcup_{i=0}^k F_i$ ve $\int_{A_k} f = \sum_{i=0}^k \int_{F_i} f$. Varsayımımızdan dolayı $\sum_{i=0}^{+\infty} \int_{F_i} f$ serisi α 'ya yakınsaktır. Şimdi $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bir permütasyon olsun. $B_k := \bigsqcup_{i=0}^k F_{\sigma(i)}$ olmak üzere, $\{B_k\}$ ailesi de A 'yı tüketir, f 'ye uygundur ve $\int_{B_k} f = \sum_{i=0}^k \int_{F_{\sigma(i)}} f$. Eğer f 'nin mutlak integrallenebilir olmasını istiyorsak her σ için $\sum_{i=0}^{+\infty} \int_{F_{\sigma(i)}} f$ yakınsak ve toplamı α olmalıdır; özetle $\sum_{i=0}^{+\infty} \int_{F_i} f$ serisi mutlak yakınsak olmalıdır. ▲

Önerme 2.8.3 $A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme ve $f : A \rightarrow [0, +\infty)$ herhangi bir fonksiyon olsun. A kümesinin f 'ye uygun herhangi bir $\{A_k\}$ tüketimi için $\left(\int_{A_k} f\right)$ yakınsaksa f fonksiyonu A 'da mutlak integrallenebilir ve $\int_A f = \lim \int_{A_k} f$.

Kanıt. A kümesinin f 'ye uygun bir başka $\{B_k\}$ tüketimi verilsin. $\alpha := \lim \int_{A_k} f$ olsun. $B_{kl} := B_k \cap A_l$ olmak üzere $\{B_{kl}\}_{l \in \mathbb{N}}$ ailesi B_k 'yi tüketir. Önsav 2.8.1'den dolayı

$$\int_{B_k} f = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{B_{kl}} f \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{A_l} f = \alpha. \quad (2.120)$$

$f \geq 0$ olduğundan $\left(\int_{B_k} f\right)$ dizisi monoton artan ve üstten sınırlı olduğu için yakınsaktır; limitine β diyelim. (2.120)'den $\beta \leq \alpha$. Rollerini değiştirsek $\alpha \leq \beta$; böylece $\alpha = \beta$. ■

Örnek 2.8.4. (1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ olsun. $k \in \mathbb{N}^*$ için $B_k = \{(x, y) | x^2 + y^2 < k^2\}$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ 'yi B_k toplarıyla tüketelim. Kutupsal

koordinatlara geçerek

$$\iint_{\mathbf{B}_k} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^k e^{-r^2} r dr \right) d\varphi = \pi(1 - e^{-k^2}) \rightarrow \pi$$

elde ederiz. Önerme (2.8.3)'ten $f, \mathbb{R}^2$ 'de mutlak integrallenebilir ve $\iint_{\mathbb{R}^2} f = \pi$. Şimdi $\mathbb{R}^n$ 'yi

$K_k = [-k, k] \times \cdots \times [-k, k]$ küpleriyle tüketelim. Önerme 2.8.3'ten dolayı

$$\iint_{\mathbf{K}_k} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-k}^k \left(\int_{-k}^k e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy = \left(\int_{-k}^k e^{-t^2} dt \right)^2 \rightarrow \pi.$$

Dolayısıyla $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ mutlak integrallenebilir ve $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(2) $n = 1$, $A = \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x$ olsun. Her Jordan ölçülebilir $B \subset A$ kümesi için $f \in \mathcal{R}(A)$. Her $k \in \mathbb{N}^*$ için $A_k := [-k, k]$, $B_k := [k, k+1]$ ve $C_k := [-k-1, k]$ olsun. Bu kümeler Jordan ölçülebilirler ve $\{A_k\}$, $\{B_k\}$ ve $\{C_k\}$ ailelerinin her biri $A = \mathbb{R}$ 'yi f 'ye uygun biçimde tüketirler. Ancak şimdi $\lim \int_{A_k} f = 0$, $\lim \int_{B_k} f = +\infty$

$A \subset \mathbb{R}^n$ için

$$\mathcal{J}_f(A) := \{B \in \mathcal{J}^n | B \subset A \text{ ve } f|_B \in \mathcal{R}(B)\} \text{ olsun.}$$

Önerme 2.8.5 $A \subset \mathbb{R}^n$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\mathcal{J}_f(A) = \mathcal{J}_g(A)$ olsun. Ayrıca her $x \in A$ için $|f(x)| \leq g(x)$ olsun. Bu koşullarda $\int_A g$ yakınsaksa $\int_A f$ ve $\int_A |f|$ de yakınsaktır.

Sonuç 2.8.6 $\int_A f$ yakınsaktır $\iff \int_A |f|$ yakınsaktır.

Kanıt. A kümesinin g 'ye uygun bir $\{A_k\}$ tüketimi f ve $|f|$ 'ye de uygundur.

$$\left| \int_{A_{l+k}} |f| - \int_{A_k} |f| \right| = \left| \int_{A_{l+k} \setminus A_k} |f| \right| \leq \int_{A_{l+k} \setminus A_k} g = \int_{A_{l+k}} g - \int_{A_k} g.$$

Önsav 2.8.1 ve Cauchy Ölçütünden $\int_A |f|$ yakınsaktır.

$0 \leq f^+ \leq |f|$ ve $0 \leq f^- \leq |f|$ olduğundan, $g = |f|$ alırsak, az önce kanıtlanandan f^+ ve f^- mutlak integrallenebilir; dolayısıyla $f = f^+ - f^-$ mutlak integrallenebilir. ■

2.8.2 Özdışı İntegraller

$-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ve $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $a = -\infty$ veya $a \in \mathbb{R}$ ve $a < c < b$ olan her c için f fonksiyonu $\langle a, c \rangle$ 'de sınırlı değilse a noktasına f 'nin bir **kritik noktası** diyelim. Benzer biçimde $b = +\infty$ veya $b \in \mathbb{R}$ ve f fonksiyonu her $\langle c, b \rangle$ 'de sınırlı değilse b noktası f 'nin bir kritik noktası diyelim. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ve a, b uç noktalarından en az birinin kritik nokta olduğu durumlarda bir $\int_a^b f$ integrali açıklayacağız; bu artık Riemann integrali olamaz.

Tanım 2.8.7 (Tip1) $a \in \mathbb{R}, f : \langle a, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ve her $a < b < +\infty$ için f fonksiyonu $\langle a, b \rangle$ 'de Riemann integrallenebilir olsun. $F(b) := \int_a^b f$ olmak üzere $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)$ limiti varsa, f fonksiyonu $\langle a, +\infty \rangle$ 'da **özdeş integrallenebilir** veya $\int_a^{+\infty} f$ özdeş integrali **yakınsaktır**, bu limite ise f 'nin **özdeş integrali** diyecek ve bunu

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$

olarak göstereceğiz. $\int_a^{+\infty} f$ yakınsak değilse **ıraksaktır**, eğer $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) = \pm\infty$ ise **gerçek ıraksaktır** diyecek ve bunu $\int_a^{+\infty} f = \pm\infty$ ile göstereceğiz.

Benzer biçimde $\int_{-\infty}^a f$ integralinin yakınsaklığı $\lim_{b \downarrow -\infty} \int_b^a f$ 'nin yakınsaklığı olarak tanımlanır.

Örnek 2.8.8. (1) $a > 0, f : \langle a, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ olsun. $a < b < +\infty$ için f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan Riemann integrallenebilir ve

$$F(b) = \int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \left[\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{b^{\alpha-1}} \right], & \alpha \neq 1 \\ \ln b - \ln a, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Dolayısıyla $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ integrali $\alpha > 1$ için yakınsak ve değeri $\frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$, $\alpha \leq 1$ içinse $+\infty$ 'a gerçek ıraksaktır. Okura $\langle a, +\infty \rangle$ aralığında sırasıyla $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x}$ ve $\frac{1}{x^2}$ fonksiyonlarının grafiklerini çizerek, integral-alan ilişkisi bağlamında bu sonuçları yorumlamasını öneririz. **(2)** $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ verilsin. $F(b) := \int_0^b \cos x dx = [\sin x]_0^b = \sin b$ olduğundan $b \rightarrow +\infty$ için $F(b)$ 'nin limiti yoktur. Dolayısıyla $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ integrali ıraksaktır.

Tanım 2.8.9 (Tip2) $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırsız, ancak, $a < c < b$ koşulunu sağlayan her c için f fonksiyonu $\langle a, c \rangle$ aralığında Riemann integrallenebilir olsun. $F(c) := \int_a^c f$ olmak üzere $\lim_{c \rightarrow b} F(c)$ limiti varsa, f fonksiyonu $\langle a, b \rangle$ 'de **özdeş integrallenebilir**, $\int_a^b f$ özdeş integrali **yakınsaktır**, bu limite ise f 'nin **özdeş integrali** diyecek ve bunu

$$\int_a^b f := \lim_{c \uparrow b} F(c) = \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f$$

olarak göstereceğiz.

Benzer biçimde $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırsız, ancak, $a < c < b$ koşulunu sağlayan her c için f fonksiyonu $\langle c, b \rangle$ 'de integrallenebilir ve $\lim_{c \downarrow a} F(c)$ limiti varsa f özdeş integrallenebilir denir ve

$$\int_a^b f := \lim_{c \downarrow a} \int_c^b f$$

olarak açıklanır.

Örnek 2.8.10. $I = (0, 1]$ ve $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ olsun. Her $0 < c < 1$ için f fonksiyonu $[c, 1]$ aralığında Riemann integrallenebilir ve

$$F(c) = \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \left[\frac{1}{c^{\alpha-1}} - 1 \right], & \alpha \neq 1 \\ -\ln c, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Bu durumda $0 < \alpha < 1$ için $\int_0^1 f$ yakınsak ve $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = 1 - \alpha$ olur. $\alpha \geq 1$ içinse $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ ıraksaktır.

Şimdi her türün her ikisinin de bir arada olduğu durumları ele alalım. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve her $I \subset \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ kapalı aralığı için $f \in \mathcal{R}(I)$ olsun; bu duruma **Tip3** diyelim. Bu durumda herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için

$$\int_a^{+\infty} f \text{ ve } \int_{-\infty}^a f \text{ yakınsaksa } \int_{-\infty}^{+\infty} f := \int_{-\infty}^a f + \int_a^{+\infty} f$$

olarak açıklanır ve $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ *yakınsaktır* denir. Bu tanımın a noktasının seçiminden bağımsız olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Açıkça $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ 'nin yakınsak olması

$$\lim_{a \downarrow -\infty, b \uparrow +\infty} \int_a^b f \quad (2.121)$$

limitinin olmasına denktir ve bu durumda $\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{a \downarrow -\infty, b \uparrow +\infty} \int_a^b f$. Ancak dikkat: (2.121)'de $a = -b$ alamayız. Örneğin $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ ıraksaktır, ancak $a > 0$ olmak üzere $\lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a x dx = 0$! Eğer varsa

$$\lim_{a \uparrow +\infty} \int_{-a}^a f \text{ limitine } \mathbf{Cauchy \text{ esas değeri}} \text{ denir ve } CPV \int_{-\infty}^{+\infty} f$$

ile gösterilir. Eğer $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ yakınsaksa belli ki $\int_{-\infty}^{+\infty} f = CPV \int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Benzer biçimde $\langle a, b \rangle$ bir sınırlı aralık, $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ve herhangi bir $c \in (a, b)$ için f fonksiyonu $\langle a, c \rangle$ ve $[c, b)$ aralıklarında sınırsız olsun; buna **Tip4** diyelim.

$$\int_a^c f \text{ ve } \int_c^b f \text{ yakınsaksa } \int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f$$

olarak açıklanır ve $\int_a^b f$ *yakınsaktır* denir. Bu tanım da c noktasının seçiminden bağımsızdır. Son bir tip ise her iki uç noktanın da kritik, ancak bir uçnokta sonlu, diğeri ise $\pm\infty$ 'dan biri olan durumdur; buna **Tip5** diyelim. Şimdi bazı yakınsaklık ölçütleri verelim.

Teorem 2.8.11 (Özdışı İntegraller İçin Cauchy Ölçütü) $a < b \leq +\infty$ ve $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ Tip1 veya Tip2 durumunda olsun. $\int_a^b f$ özdışı integralin yakınsak olması için gvyk aşağıdakidir:²⁶

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon \in [a, b) \forall \xi, \eta \left(c_\varepsilon \leq \xi \leq \eta < b \implies \left| \int_\xi^\eta f \right| < \varepsilon \right).$$

Kanıt. (1) $\int_a^b f$ yakınsak ve $I = \int_a^b f$ olsun. Limit tanımından

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon \in [a, b) \forall \xi \in [c_\varepsilon, b) : \left| I - \int_a^\xi f \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\int_\xi^\eta f = \int_a^\eta f - \int_a^\xi f$ olduğundan $\xi \in [c_\varepsilon, b)$ ve $\eta \in [\xi, b)$ için

$$\left| \int_\xi^\eta f \right| = \left| \int_a^\eta f - I \right| + \left| I - \int_a^\xi f \right| < \varepsilon.$$

(2) Koşul sağlansın. Bir $(\xi_n) \subset [a, b)$ dizisini $\lim \xi_n = b$ olacak biçimde seçelim. Koşulumuzdan, $I_n := \int_a^{\xi_n} f$ olmak üzere (I_n) bir Cauchy dizisidir ve bir I' 'ye yakınsar. I sayısı (ξ_n) dizisinin seçiminde bağımsızdır. Gerçekten $(\xi'_n) \subset [a, b)$ dizisi $\lim \xi'_n = b$ olan bir başka dizi olsun. Aynı argümanla $I'_n := \int_a^{\xi'_n} f$ dizisi de yakınsaktır ve $\lim I'_n = I'$ olsun. Şimdi $\xi_1, \xi'_1, \xi_2, \xi'_2, \dots$ fermuar dizisi de b' 'ye yakınsar. Aynı argümanla $I_1, I'_1, I_2, I'_2, \dots$ dizisi de yakınsaktır. Dolayısıyla bu dizinin her alt dizisi de aynı sayıya yakınsar; öyleyse $I = I'$. Bu ise $\lim \int_a^c f = I$ demektir. ■

Sonuç 2.8.12 $\int_a^b |f|$ yakınsaksa $\int_a^b f$ de yakınsaktır.

Kanıt. $\left| \int_\xi^\eta f \right| \leq \int_\xi^\eta |f|$ ve Cauchy Ölçütü'nden çıkar. ■

$\int_a^b |f|$ yakınsaksa $\int_a^b f$ **mutlak yakınsaktır** denir. $\int_a^{+\infty} f$ integrali ile seriler arasında bayağı benzerlikler vardır. Sonuç 2.8.12, $\int_a^{+\infty} f$ mutlak yakınsaksa yakınsaktır der; tıpkı serilerde olduğu gibi. Yine serilerde olduğu gibi $\int_a^{+\infty} f$ 'nin yakınsaklığından $\int_a^{+\infty} f$ 'nin mutlak yakınsaklığı çıkmaz! Ve burada özdışı integraller Riemann integrallenebilir fonksiyonlardan ayrılır; çünkü $f \in \mathcal{R}(I)$ ise $|f| \in \mathcal{R}(I)$!

Örnek 2.8.13. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ integrali yakınsak, ancak mutlak yakınsak değildir. Görelim. Her şeyden önce $f(0) := 0$ olarak açıklandığında $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 'nin sürekli olduğunun

²⁶Cauchy Ölçütü: $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, a noktası A 'nın bir yığılma noktası olsun. Şu iki önerme denktir: (1) $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. (2) Her $\varepsilon > 0$ için a 'nın bir U komşuluğu, her $x, y \in U \cap A$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak biçimde vardır. Bu teorem tam da budur.

biliyoruz; tipl1 durumundayız. Her $0 < \xi \leq \eta < +\infty$ için kısmi integralle

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\eta} \frac{\sin x}{x} dx &= \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_{\xi}^{\eta} - \int_{\xi}^{\eta} \frac{\cos x}{x^2} dx \implies \\ \left| \int_{\xi}^{\eta} \frac{\sin x}{x} dx \right| &\leq \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} + \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{x^2} dx < \frac{3}{\xi} \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Cauchy Ölçütü ile $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ integrali yakınsaktır (ve $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$).

Şimdi $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ 'in yakınsak olmadığını görelim.

$$\begin{aligned} \int_0^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \sum_{\nu=0}^k \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \\ &\geq \sum_{\nu=0}^k \frac{1}{\nu\pi} \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^k \frac{1}{\nu} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Her ne kadar ileride öğreneceğimiz Lebesgue integrali Riemann integralini genelleştirse de özdeş integralde durum farklıdır. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ 'de Lebesgue integrallemez, ancak özdeş integralenebilir!

Önerme 2.8.14 (Majör Ölçütü) $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ Tip1 veya Tip2 olsun. Her $x \in [a, b)$ için $|f(x)| \leq g(x)$ ve $\int_a^b g$ yakınsaksa $\int_a^b f$ mutlak yakınsaktır.

Kanıt. Cauchy Ölçütü ve $\left| \int_{\xi}^{\eta} f \right| \leq \int_{\xi}^{\eta} g$ eşitsizliğinden çıkar. ■

Önerme 2.8.15 (İntegral Ölçütü) $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $f : [n_0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ monoton azalansa

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \text{ yakınsaktır} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f \text{ yakınsaktır.}$$

Kanıt. Koşulumuzdan her $x \in [n, n+1]$ için $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. Buradansa $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$ olur ve bu savı verir. ■

Örnek 2.8.8 (1) ve İntegral Ölçütü ile

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ serisi } \begin{cases} \alpha > 1 \text{ için yakınsaktır.} \\ \alpha \leq 1 \text{ için ıraksaktır.} \end{cases}$$

Her $s > 1$ için $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ olarak açıklanan fonksiyon, *Riemann'ın* ζ -fonksiyonudur ve çok önemlidir.

$\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ **gamma fonksiyonu**

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Tip5 integrali ile tanımlanmıştır. Herhangi bir $0 < r < +\infty$ için $\int_0^r t^{x-1}e^{-t}dt$ integralinin yakınsaklığı $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$ eşitsizliğinden çıkar. Diğer yandan $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{x+1}e^{-x} = 0$ olduğundan bir $M > 0$ sayısı her $x \geq M$ için $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{-2}$ olacak biçimde vardır. Majör Ölçütü ile $\int_M^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ yakınsaktır. Sonuçta $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ yakınsaktır ve $\Gamma(x)$ iyi tanımlıdır. $0 < r < R < +\infty$ için kısmi integralle

$$\int_r^R t^x e^{-t} dt = [t^x e^{-t}]_r^R + x \int_r^R t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Buradan $r \downarrow 0$, $R \uparrow +\infty$ limitlerine geçerek $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ elde ederiz. Bu denklem $\Gamma(1) = 1$ ile birlikte her $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n+1) = n!$ bağıntısını verir.

2.9 Vektör Değerli Fonksiyonlarda İntegral

Not. Bu kısımda değerlerini bir Banach uzayında alan fonksiyonların Riemann integrallerine kısaca değineceğiz. Amacımız Altkısım 3.3.3'te kısaca değineceğimiz, değerlerini bir Banach uzayında alan fonksiyonların Lebesgue integralinin, burada ele alacağımız Riemann integrallerinin doğal devamı olduğunu göstermektir. ▲

Uzlaşma: Bu kısımda daima $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir, $\mathbb{K}$ cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere $(V, |||)$ bir $\mathbb{K}$ - Banach uzayı ve $f : \Omega \rightarrow V$ bir *sınırlı* fonksiyon olacaktır.

$\mathcal{Z} \in \mathfrak{P}(\Omega)$ için $V \neq \mathbb{R}$ ise artık $A(f, \mathcal{Z}), U(f, \mathcal{Z})$ toplamaları ve $\int_{\Omega} f, \bar{\int}_{\Omega} f$ integralleri ve grafaltı tanımlanamazlar. Dolayısıyla salt bu kavramlara ve $\mathbb{R}$ 'nin sıralamasına dayanan teoremleri yeni duruma aktaramayız; bunlar bir iki önermeden ibarettir. Örneğin $V \neq \mathbb{R}$ ise artık integral ve hacim ilişkisi anlamsızdır; yine $\mathbb{R}$ 'deki sıralamaya dayanan Sonuç 2.3.9 ve Önerme 2.3.22 (ii) gibi. Elimizde aslında işin özü, $Sl(f, \mathcal{Z})$ salınımları ve $R(f, \mathcal{Z}(a))$ Riemann toplamaları kalır. Şimdiye kadar kanıtlanan teoremlerin neredeyse tümü bu genel duruma aktarılırlar.

Her $\mathcal{Z}(a) \in \mathfrak{Z}^*(\Omega)$ için

$$R(f, \mathcal{Z}(a)) := \sum_{i=1}^k f(a_i) j_n(A_i)$$

sayısına f 'nin $\mathcal{Z}(a)$ 'ya göre **Riemann toplamı** denir.

Tanım 2.9.1 $(R(f, \mathcal{Z}(a)))_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}^*(\Omega)}$ ağı yakınsaksa f fonksiyonu **Riemann integrallenebilir** ve

$$\int_{\Omega} f \equiv \int_{\Omega} f dj_n \equiv \int_{\Omega} f(x) dj_n(x) := \lim_{\mathcal{Z}(a) \in \mathfrak{Z}^*(\Omega)} R(f, \mathcal{Z}(a))$$

vektörüne ise f 'nin Ω 'daki **Riemann integrali** denir. $\mathcal{R}(\Omega, V)$ ile Riemann integrallenebilen $f : \Omega \rightarrow V$ fonksiyonların kümesini gösterelim.

Sonuç 2.9.2 $\mathcal{R}(\Omega, V)$ bir $\mathbb{K}$ -vektör uzayıdır ve her $a, b \in \mathbb{K}$ ve $f, g \in \mathcal{R}(\Omega, V)$ için

$$\int_{\Omega} (af + bg) = a \int_{\Omega} f + b \int_{\Omega} g.$$

Kanıt. Doğrudan Önerme 1.1.7 (i)'den çıkar. ■

Örnek 2.9.3. $\mathcal{Z} = \{A_1, \dots, A_k\} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ ve $v_1, \dots, v_k \in V$ olmak üzere

$$s := \sum_{i=1}^k v_i \mathbf{1}_{A_i} = v_1 \mathbf{1}_{A_1} + \dots + v_k \mathbf{1}_{A_k} \quad (2.122)$$

tipindeki $s : \Omega \rightarrow V$ fonksiyonlarına bir **Riemann merdiveni**, kısaca **R-merdiveni** diyelim. A_i kümelerine s merdiveninin basamakları diyelim. Ayrıca, $i \neq j$ için daima $v_i \neq v_j$ ise s 'nin (2.122) gösterimine s 'nin **normal gösterimi** diyelim. Herhangi bir $t = \sum_{1 \leq j \leq m} w_j B_j$ R-merdiveni normal gösterime getirilebilir: $w_1, \dots, w_m$ değerlerinin birbirinden farklı olanlarını $v_1, \dots, v_k$ olarak numaralar ve $A_i := \cup_{j, w_j = v_i} B_j$ olarak açıklarsak $t = \sum_{1 \leq i \leq k} v_i \mathbf{1}_{A_i}$ gösterimi normaldir. Ω 'daki R-merdivenlerinin kümesini $\mathcal{M}_r(\Omega, V)$ ile gösterelim. $\mathcal{M}_r(\Omega, V)$ 'nin bir $\mathbb{K}$ -vektör uzayı olduğunu okur kolayca gösterebilir. Genel yöntem şudur: Basamakları A_i ve B_j olan s ve t merdivenleri verildiğinde bunlar basamakları $A_i \cap B_j$ olan merdivenlere dönüştürülür, dolayısıyla $s+t$, basamakları $A_i \cap B_j$ olan bir merdiven fonksiyonudur. Her $x \in A$ için $\|s\|(x) := \|s(x)\|$ ile açıklanan s fonksiyonu $\mathcal{M}_r(\Omega, \mathbb{R})$ 'dedir.

$s = \sum_i v_i \mathbf{1}_{A_i}$ normal gösterimde ve $\mathcal{Z}_0 := \{A_1, \dots, A_k\}$ ise her $\mathcal{Z}_0 \prec \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ için $R(f, \mathcal{Z}_0(a)) = R(f, \mathcal{Z}(b))$. dolayısıyla $(R(f, \mathcal{Z}(b)))_{\mathcal{Z} \succ \mathcal{Z}_0}$ ağı yakınsaktır. Sonuçta s ve $\|s\|$ Riemann integrallenebilir ve

$$\int_{\Omega} s = \sum_{i \in I} j_n(A_i) v_i \quad \text{ve} \quad \int_{\Omega} \|s\| = \sum_{i \in I} \|v_i\| j_n(A_i). \quad (2.123)$$

Dolayısıyla $\|\int_{\Omega} s\| \leq \int_{\Omega} \|s\|$. Okur,

$$\|s\|_* := \int_{\Omega} \|s\| \quad \text{nin} \quad (2.124)$$

$\mathcal{M}_r(\Omega, V)$ 'de bir yarınorm olduğunu kolayca görür.

Lemma 2.9.4 $\mathcal{Z} = \{A_i\} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ ve $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) \leq \varepsilon$ olsun. $a_i, a'_i \in A_i$ olmak üzere

$$\|R(f, \mathcal{Z}(a)) - R(f, \mathcal{Z}(a'))\| \leq \varepsilon.$$

Kanıt. Her i için

$$\|f(a_i)j_n(A_i) - f(a'_i)j_n(A_i)\| = \|f(a_i) - f(a'_i)\| j_n(A_i) \leq \text{sl}(f, A_i)j_n(A_i),$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|R(f, \mathcal{Z}(a)) - R(f, \mathcal{Z}(a'))\| &= \left\| \sum_i (f(a_i)j_n(A_i) - f(a'_i)j_n(A_i)) \right\| \\ &\leq \sum_i \|f(a_i)j_n(A_i) - f(a'_i)j_n(A_i)\| \\ &\leq \sum_i \text{sl}(f, A_i)j_n(A_i) = \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Lemma 2.9.5 $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}' \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ ve $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$ ise $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}') \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z})$.

Kanıt. I, J sonlu kümeler

olmak üzere $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I}$ ve $\mathcal{Z}' = \{B_j\}_{j \in J}$ olsun.

$$\begin{aligned} \text{Sl}(f, \mathcal{Z}') &= \sum_{j \in J} \text{sl}(f, B_j)j_n(B_j) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{B_j \subset A_i} \text{sl}(f, B_j)j_n(B_j) \right) \leq \\ &\leq \sum_{i \in I} \left(\sum_{B_j \subset A_i} \text{sl}(f, A_i)j_n(B_j) \right) = \sum_{i \in I} \text{sl}(f, A_i)j_n(A_i) = \text{Sl}(f, \mathcal{Z}). \end{aligned}$$

■

Önerme 2.9.6 $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I}$ ve $\mathcal{Z}' = \{A'_j\}_{j \in J}$ parçalanışları $\mathfrak{Z}(\Omega)$ 'da ise

$$\|R(f, \mathcal{Z}(a)) - R(f, \mathcal{Z}'(a'))\| \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) + \text{Sl}(f, \mathcal{Z}'). \quad (2.125)$$

Kanıt. (1) $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{i \in I} f(a_i)j_n(A_i) = \sum_{i \in I, j \in J, A'_j \subset A_i} f(a_i)j_n(A'_j). \quad (2.126)$$

Dolayısıyla $j_n(A_i) = \sum_{j, A'_j \subset A_i} j_n(A'_j)$ ve $A'_j \subset A_i$ için $\|f(a_i) - f(a'_j)\| \leq \text{sl}(f, A_i)$ olduğunu gözetirsek, yalın yazılımla

$$\begin{aligned} \|R(f, \mathcal{Z}(a)) - R(f, \mathcal{Z}'(a'))\| &\leq \sum_{i,j} \|f(a_i) - f(a'_j)\| j_n(A'_j) \leq \\ &\sum_{i,j} \text{sl}(f, A_i)j_n(A'_j) \leq \sum \text{sl}(f, A_i)j_n(A_i) \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z}). \end{aligned}$$

(2) Genel durumda $\mathcal{Z}'' := \mathcal{Z}\mathcal{Z}' = \{A_k''\}_{k \in K}$ olsun ve $a_k'' \in A_k''$ noktaları keyfi seçilsinler. Bu durumda (1)'den

$$\begin{aligned} \|R(f, \mathcal{Z}(a)) - R(f, \mathcal{Z}'(a'))\| &\leq \|R(f, \mathcal{Z}(a)) - R(f, \mathcal{Z}''(a''))\| \\ &\quad + \|R(f, \mathcal{Z}''(a'')) - R(f, \mathcal{Z}'(a'))\| \\ &\leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) + \text{Sl}(f, \mathcal{Z}'). \end{aligned}$$

■

Uzlaşma: Bir $R(f, \mathcal{Z}(a))$ ifadesinde $a = (a_i)$ 'yi açık olarak bilmek hiç önemli değilse $R(f, \mathcal{Z}(a))$ yerine yalın olarak $R(f, \mathcal{Z})$ yazacağız.

Tanım 2.9.7 Her $\varepsilon > 0$ için bir $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ parçalanışı $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabiliyorsa f fonksiyonu ε -ölçütünü sağlar diyelim.

Teorem 2.9.8 $f : \Omega \rightarrow V$ fonksiyonu ε -ölçütünü sağlarsa aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) f ve $\|f\|$ Riemann integrallenebilir ve $\|\int_{\Omega} f\| \leq \int_{\Omega} \|f\|$.
- (ii) $\lim_{k \geq 1} \text{Sl}(f, \mathcal{Z}_k) = 0$ koşulunu sağlayan her $(\mathcal{Z}_k)_{k \geq 1} \subset \mathfrak{Z}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} f \equiv \int_{\Omega} f dj_n = \lim_k \int_{\Omega} f_k.$$

Kanıt. (i) $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin ve $\mathcal{Z}_{\varepsilon}$ parçalanışı $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}_{\varepsilon}) < \varepsilon/2$ olacak biçimde seçilsin. Önsav 2.9.5 ve (2.125)'ten dolayı her $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}' \succ \mathcal{Z}_{\varepsilon}$ için

$$\|R(f, \mathcal{Z}(a)) - R(f, \mathcal{Z}'(a'))\| \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z}_{\varepsilon}) < \varepsilon \quad (2.127)$$

olur. Dolayısıyla $(R(f, \mathcal{Z}(a)))$ bir Cauchy ağıdır ve Teorem 1.1.5'ten ötürü yakınsaktır. Herhangi bir $B \subset \Omega$ için $\text{sl}(\|f\|, B) \leq \text{sl}(f, B)$ olduğundan daima $\text{Sl}(\|f\|, \mathcal{Z}) \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z})$ olur. Dolayısıyla $\|f\|$ fonksiyonu da ε -ölçütünü sağlar ve az önce kanıtlanandan Riemann integrallenebilir. Son savımız ise $\|R(f, \mathcal{Z})\| \leq R(\|f\|, \mathcal{Z})$ eşitsizliğinden çıkar.

(ii) $(\mathcal{Z}_k), (\mathcal{Z}'_k) \subset \mathfrak{Z}(\Omega)$ dizileri $\lim_{k \geq 1} \text{Sl}(f, \mathcal{Z}_k) = 0 = \lim_{k \geq 1} \text{Sl}(f, \mathcal{Z}'_k)$ olacak biçimde verilsinler. (2.127) eşitsizliğinden $(R(f, \mathcal{Z}_k))$ ve $(R(f, \mathcal{Z}'_k))$ dizileri yakınsaktırlar. (2.125)'ten

$$\|R(f, \mathcal{Z}_k) - R(f, \mathcal{Z}'_k)\| \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z}_k) + \text{Sl}(f, \mathcal{Z}'_k) \rightarrow 0,$$

dolayısıyla $\lim R(f, \mathcal{Z}_k) = \lim R(f, \mathcal{Z}'_k)$.

Eğer daha baştan $\mathcal{Z}_1 \prec \mathcal{Z}_2 \prec \dots$ değilse $\mathcal{W}_1 := \mathcal{Z}_1$ ve $k \geq 2$ için $\mathcal{W}_k := \mathcal{Z}_1 \cdots \mathcal{Z}_k$ alarak $\mathcal{W}_1 \prec \mathcal{W}_2 \prec \dots$ sağlanır. Elbette $\lim \text{Sl}(f, \mathcal{W}_k) = 0$. Az önce kanıtlanandan $(R(f, \mathcal{W}_k))$ dizisi yakınsaktır; $\mathcal{W}_1 \prec \mathcal{W}_2 \prec \dots$ olduğundan bu limit $(R(f, \mathcal{Z}))$ Cauchy ağıının limitidir. ■

Teorem 2.9.9 *Sınırlı $f : \Omega \rightarrow V$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler denktirler:*

- (i) f fonksiyonu ε -ölçütünü sağlar.
- (ii) Her $\varepsilon > 0$ için $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_\varepsilon \in \mathfrak{Z}(\Omega)$ parçalanışları $\mathcal{Z}_\varepsilon = \mathcal{Z}_1 \sqcup \mathcal{Z}_2$ ve

$$\forall A_i \in \mathcal{Z}_1 \text{ sl}(f, A_i) < \varepsilon \text{ ve } \sum_{A_i \in \mathcal{Z}_2} j_n(A_i) < \varepsilon$$

olacak biçimde vardır.

- (iii) Her $s \in \mathcal{M}_r(\Omega, V)$ için $\|f - s\| \in \mathcal{R}(\Omega, \mathbb{R})$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $s_\varepsilon \in \mathcal{M}_r(\Omega, V)$ merdiven fonksiyonu $\int_\Omega \|f - s_\varepsilon\| < \varepsilon$ olacak biçimde vardır; dolayısıyla

$$\inf_{s \in \mathcal{M}_r(\Omega, V)} \int_\Omega \|f - s\| = 0.$$

Kanıt. (i) $\implies$ (ii) $\varepsilon > 0$ keyfi verisin. Koşulumuzdan bir $\mathcal{Z}_\varepsilon$ parçalanışını $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon^2$ olacak biçimde seçebiliriz.

$$\mathcal{Z}_1 := \{A_i \in \mathcal{Z}_\varepsilon \mid \text{sl}(f, A_i) < \varepsilon\} \text{ ve } \mathcal{Z}_2 := \{A_i \mid \text{sl}(f, A_i) \geq \varepsilon\}$$

olsun. Bu durumda

$$\varepsilon \left(\sum_{A_i \in \mathcal{Z}_2} j_n(A_i) \right) = \sum_{A_i \in \mathcal{Z}_2} \varepsilon j_n(A_i) \leq \sum_{A_i \in \mathcal{Z}_\varepsilon} \text{sl}(A_i) j_n(A_i) = \text{Sl}(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon^2.$$

Buradan $\sum_{A_i \in \mathcal{Z}_2} j_n(A_i) < \varepsilon$ olur ve (ii) kanıtlanmıştır.

(ii) $\implies$ (i): $j_n(\Omega) = 0$ ise kanıtlanacak bir şey yoktur; çünkü her $\mathcal{Z}$ parçalanışı için $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) = 0$ olur. Şimdi $j_n(\Omega) > 0$ olsun ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin.

$$\eta := \varepsilon / (j_n(\Omega) + \text{Sl}(f, \Omega))$$

olsun. η için koşulumuza uygun $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_\eta$ parçalanışlarını seçelim.

$$\begin{aligned} \text{Sl}(f, \mathcal{Z}_\eta) &= \sum_{A_i \in \mathcal{Z}_1} \text{sl}(f, A_i) j_n(A_i) + \sum_{A_i \in \mathcal{Z}_2} \text{sl}(f, A_i) j_n(A_i) \\ &\leq \left(\sup_{A_i \in \mathcal{Z}_1} \text{sl}(f, A_i) \right) \sum_{A_i \in \mathcal{Z}_1} j_n(A_i) + \text{Sl}(f, \Omega) \sum_{A_i \in \mathcal{Z}_2} j_n(A_i) \\ &< \eta j_n(\Omega) + \eta \text{Sl}(f, \Omega) = \varepsilon. \end{aligned}$$

(i) $\implies$ (iii): $s \in \mathcal{M}_r(\Omega, V)$ olsun ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Hipotezimizden bir $\mathcal{Z}_\varepsilon$ ile $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon$. Eğer $\mathcal{Z}_\varepsilon = \{A_1, \dots, A_k\}$ ise daha baştan $\mathcal{Z}_\varepsilon$

parçalanışımı s fonksiyonu her bir A_i 'de sabit olacak biçimde seçebiliriz. Bu durumda, her $x, y \in A_i$ için

$$\|f(x) - s(x)\| - \|f(y) - s(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\|.$$

Böylece $\text{sl}(\|f - s\|, A_i) \leq \text{sl}(f, A_i)$, dolayısıyla $\text{Sl}(\|f - s\|, \Omega) \leq \text{Sl}(f, \Omega) < \varepsilon$ olur. Önerme 2.3.6'dan dolayı $\|f - s\| \in \mathcal{R}(\Omega, \mathbb{R})$. Şimdi her i için bir $a_i \in A_i$ seçelim ve her $x \in A_i$ için $s_\varepsilon(x) := f(a_i)$ olarak açıklayalım; özetle $s_\varepsilon := \sum_{i=1}^k f(a_i)1_{A_i}$ olsun. İrdelemelerimizden $\|f - s_\varepsilon\| \in \mathcal{R}(\Omega, \mathbb{R})$ ve her $x \in A_i$ için $\|f(x) - s_\varepsilon(x)\| \leq \text{sl}(f, A_i)$ olduğundan

$$\int_{\Omega} \|f - s_\varepsilon\| = \sum_{i=1}^k \int_{A_i} \|f - s_\varepsilon\| \leq \sum_{i=1}^k j_n(A_i) \text{sl}(f, A_i) = \text{Sl}(f, \Omega) < \varepsilon$$

olur. Böylece (i) $\implies$ (iii).

(iii) $\implies$ (i): $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $s_\varepsilon \in \mathcal{M}_r(\Omega, V)$ fonksiyonunu $\int_{\Omega} \|f - s_\varepsilon\| < \varepsilon/2$ olacak biçimde seçelim. Bir $\mathcal{Z}_\varepsilon = \{A_i\}$ parçalanışımı s_ε fonksiyonu A_i 'lerde sabit ve

$$\sum_{1 \leq i \leq k} j_n(A_i) \|f - s_\varepsilon\|_{A_i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde seçebiliriz.²⁸ Bu durumda her $y, z \in A_i$ için $\|f(y) - f(z)\| \leq 2\|f - s_\varepsilon\|_{A_i}$, dolayısıyla $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) = \sum_{1 \leq i \leq k} j_n(A_i) \text{sl}(f, A_i) < \varepsilon$ olur. Böylece (iii) $\implies$ (i). ■

$f : \Omega \rightarrow V$ sınırlı fonksiyonu için

$$U_\varepsilon(f) := \{s \in \mathcal{M}_r(\Omega, V) \mid \|f - s\| < \varepsilon\} \text{ ve}$$

$$I_\varepsilon(f) := \left\{ \int_{\Omega} s \mid s \in U_\varepsilon(f) \right\}$$

olsun. Teorem 2.9.9'dan dolayı (i) sağlanmışsa $U_\varepsilon(f) \neq \emptyset$ ve $s, t \in U_\varepsilon(f)$ için

$$\left\| \int_{\Omega} s - \int_{\Omega} t \right\| = \left\| \int_{\Omega} (s - t) \right\| \leq \int_{\Omega} \|s - t\| \leq \int_{\Omega} \|s - f\| + \int_{\Omega} \|f - t\| < 2\varepsilon$$

olduğundan $d(\overline{U_\varepsilon(f)})$ çapı $\leq 2\varepsilon$ olur²⁹. Dolayısıyla $\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{U_\varepsilon(f)}$ arakesiti bir tek öge içerir; bunu

$$I(f) := \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{U_\varepsilon(f)}$$

ile gösterelim.

²⁸ $\|f - s_\varepsilon\|_{A_i} := \sup_{x \in A_i} \|f(x) - s_\varepsilon(x)\|$.

²⁹ (X, d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olmak üzere $d(A) := \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ 'ya A kümesinin **çapı** denir.

Sonuç 2.9.10 $f : \Omega \rightarrow V$ fonksiyonu ε -ölçütünü sağlasın. Bu durumda bir $(s_k) \subset \mathcal{M}_r(\Omega, V)$ dizisi $\int_{\Omega} \|f - s_k\| dj_n \rightarrow 0$ olacak biçimde vardır ve $\int_{\Omega} f dj_n = \lim \int_{\Omega} s_k$. Son eşitlik $\int_{\Omega} \|f - t_k\| dj_n \rightarrow 0$ koşulunu sağlayan her $(t_k) \subset \mathcal{M}_r(\Omega, V)$ dizisi için geçerlidir, $dd \int_{\Omega} f dj_n = \lim \int_{\Omega} s_k$.

Kanıt. $s_k \in U_{1/k}(f)$ seçiniz. ■

Bu sonuç çoğu zaman çıkış noktası olarak seçilir. Önce Riemann merdivenlerinin integrali açıklanır. Ardından bir $f : \Omega \rightarrow V$ fonksiyonu için $(s_k), (t_k) \subset \mathcal{M}_r(\Omega, V)$ dizileri için $\|f - s_k\|_* \rightarrow 0$ ve $\|f - t_k\|_*$ ise $\lim \int_{\Omega} s_k = \lim \int_{\Omega} t_k$ olduğu kanıtlanır ve $\int_{\Omega} f := \lim \int_{\Omega} s_k$ olarak açıklanır. Bu yönde daha fazla ilerlemeyeceğiz.

Bölüm 3

Lebesgue Ölçüsü ve Lebesgue İntegrali

Bu bölümde ölçülerimizin $+\infty$ ve fonksiyonlarımızın $\pm\infty$ değerlerini almasına izin vereceğiz. Dolayısıyla bunların aritmetiğine kısaca değinelim. Önce gösterimler:

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} =: [-\infty, +\infty] \text{ ve } \overline{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty].$$

$\overline{\mathbb{R}}$ 'deki sıralama her $a \in \mathbb{R}$ için $-\infty < a < +\infty$ açıklanarak $\overline{\mathbb{R}}$ 'ye genişletilir. Şimdi $\overline{\mathbb{R}}$ 'deki aritmetiği vereceğiz. Temel mantık şöyledir: $(a_n) \subset \mathbb{R}$ dizisi $\overline{\mathbb{R}}$ 'de $\pm\infty$ 'a yakınsaksa- bu tamda bu dizinin $\mathbb{R}$ 'de $\pm\infty$ 'a ıraksak olması demektir -işlemler her $r \in \mathbb{R}$ için

$$r + \lim a_n = \lim(r + a_n) \text{ ve } r \cdot \lim a_n = \lim r a_n$$

ve değişmeli olacak biçimde açıklanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} r + (\pm\infty) &= \pm\infty + r = \pm\infty & , (\forall r \in \mathbb{R}) \\ r \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot r = \pm\infty & , (\forall r (0 < r \leq +\infty)) \\ r \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot r = \mp\infty & , (\forall r (-\infty \leq r < 0)) \\ 0 \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\sup \emptyset := -\infty \text{ ve } \inf \emptyset := +\infty$$

olarak açıklanır. Bu tanım

$$A \subset B \implies \sup A \leq \sup B \text{ ve } \inf A \geq \inf B$$

çıkarımı ile uyumludur.

Herhangi bir incelemede temel kümemiz X olsun. Bu durumda $A \subset X$ için $A^c := X \setminus A$ olacaktır. $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ ise $\mathcal{A}^c := \{A^c | A \in \mathcal{A}\}$ olsun. A 'nın çokluk sayısını (dd kardinalitesini) $\natural A$ ile göstereceğiz. $\omega := \natural \mathbb{N}$ ve $\mathfrak{c} := \natural \mathbb{R}$ gösterimleri yaygındır. Kümeler kuramında sonsuz kardinal sayıları sırasıyla $\aleph_0 := \omega, \aleph_1, \aleph_2, \dots$ olarak gösterilir. $\mathfrak{a} := \natural X$ ise $\natural(\mathfrak{P}(X)) = 2^{\mathfrak{a}}$. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $\natural \mathbb{R}^n = \mathfrak{c}$ olduğundan $\natural(\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)) = 2^{\mathfrak{c}}$.

Bir $(A_k) \subset \mathfrak{P}(X)$ dizisine $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ ise **artan** $A_0 \supset A_1 \supset \dots$ ise **azalan** denir.

$$(A_k) \text{ artansa } A_k \uparrow \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \text{ veya } \lim A_k := \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$$

$$(A_k) \text{ azalansa } A_k \downarrow \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k \text{ veya } \lim A_k := \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k$$

olarak açıklanır. Sonsuza giden damgayı vurgulamak gerekirse

$$A_k \uparrow A \text{ ve } B_k \downarrow B \text{ yerine } A_k \uparrow_{k=0}^{+\infty} A \text{ ve } B_k \downarrow_{k=0}^{+\infty} B$$

yazacağız. $(A_k), (B_k) \subset \mathfrak{P}(X)$ dizileri için:

$$(A_k), (B_k) \text{ artan} \implies (A_k \cup B_k) \text{ aratan ve } \lim(A_k \cup B_k) = \lim A_k \cup \lim B_k \quad (3.1)$$

$$(A_k), (B_k) \text{ azalan} \implies (A_k \cap B_k) \text{ azalan ve } \lim(A_k \cap B_k) = \lim A_k \cap \lim B_k. \quad (3.2)$$

$\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ herhangi bir aile ise

$$\mathcal{A}^\uparrow := \{A | (A_k) \subset \mathcal{A} \text{ artan ve } A_k \uparrow A\} = \{\lim A_k | (A_k) \subset \mathcal{A} \text{ artan}\}$$

olarak açıklansın.

3.1 σ -cebirleri

Tanım 3.1.1 $X \neq \emptyset$ ve $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ olsun.

$$(i) A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A},$$

$$(ii) A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A},$$

$$(iii) I \text{ sayılabilir ve her } i \in I \text{ için } A_i \in \mathcal{A} \text{ ise } \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$$

olmak üzere $\mathcal{A}$ ailesine (i) ve (ii) sağlandığında X 'te bir **cebiri** ve (i) ve (iii) sağlandığında ise bir **σ -cebiri** denir. $\mathcal{A}$ bir halka ve ayrıca (iii) sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ bir **σ -halkasıdır** denir.

Bu adlandırmada σ , sayılabilirliğe göndermede bulunur. Her σ -cebiri aynı anda bir cebirdir. $\mathcal{A}$, X 'te bir cebir olsun. Tanımdan bir $A \in \mathcal{A}$ vardır. Dolayısıyla (i) ve (ii) ile $X = A \cup A^c \in \mathcal{A}$ ve $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$ olur.

$$A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}, \quad (3.3)$$

$$A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}. \quad (3.4)$$

Dolayısıyla *her cebir bir halkadır*.

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \left(\bigcup_{i \in I} A_i^c \right)^c \text{ ve } \bigcup_{i \in I} A_i = \left(\bigcap_{i \in I} A_i^c \right)^c \quad (3.5)$$

De Morgan kurallarından dolayı, σ -cebirlерinin tanımında, (iii)'te birleşim yerine arakesit alınabilir. Böylece σ -cebirleri sayılabilir arakesitlere ve sayılabilir birleşimlere göre kapalıdır.

Her şeyden önce $\mathfrak{P}(X)$ ve $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ aileleri X 'te birer σ -halkaları ve σ -cebidirler. X 'teki σ -halkalarının, bb σ -cebirlерinin arakesitleri de X 'te birer σ -halkasıdır, bb σ -cebidir. Dolayısıyla her $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(X)$ için

$$\sigma h(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \text{ ve } \mathcal{A}, X \text{'te bir } \sigma\text{-halkası} \} \text{ ve} \quad (3.6)$$

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \text{ ve } \mathcal{A}, X \text{'te bir } \sigma\text{-cebiri} \} \quad (3.7)$$

birer σ -halkası ve σ -cebidir. $\mathcal{E}$ 'ye bunların bir **üreten sistemi** denir. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ise $\mathcal{B}(\mathcal{T}) := \sigma(\mathcal{T})$ 'ye bu topolojik uzayın **Borel σ -cebiri** denir. Doğal topolojiyle alınmış $\mathbb{R}^n$ uzayımızın Borel cebirini kısaca $\mathcal{B}^n$ ile göstereceğiz. $\mathcal{B}^n$ 'nin öğelerine **Borel kümeleri** denir.

Lemma 3.1.2 *Aşağıdaki ailelerin her biri $\mathcal{B}^n$ 'nin bir üreten sistemidir:*

- (i) *Kapalı kümelerin ailesi,*
- (ii) *Kompakt kümelerin ailesi,*
- (iii) *$\mathcal{Q}_a^n, \mathcal{Q}_k^n, \mathcal{Q}_l^n$ ve $\mathcal{Q}_r^n$ ailelerinin her biri,*
- (iv) *Çarpınlarının yalnızca biri, $a \in \mathbb{Q}$ olmak üzere, $(-\infty, a)$ ve tüm diğerleri $\mathbb{R}$ olan $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ tipinde kümelerin ailesi*
- (v) *Çarpınlarının yalnızca biri, $a \in \mathbb{Q}$ olmak üzere, $(-\infty, a]$ ve tüm diğerleri $\mathbb{R}$ olan $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ tipinde kümelerin ailesi.*

Kanıt. Örnek oluşturmak üzere (v) önermesini $\mathcal{B}^1$ için gösterelim. $\mathcal{E} := \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{Q}\}$ olsun. $\mathbb{R}$ ve $(a, +\infty)$ açık kümeler olduğundan $(-\infty, a] = \mathbb{R} \setminus (a, +\infty) \in \mathcal{B}^1$. Böylece $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}^1$, dolayısıyla $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}^1$.

$a, b \in \mathbb{Q}$ ve $a < b$ ise $(a, b] = (\mathbb{R} \setminus (-\infty, a]) \cap (-\infty, b] \in \sigma(\mathcal{E})$. Şimdi $U \subset \mathbb{R}$ açık ve $U \neq \emptyset$ olsun. Her $x \in U$ için $a, b \in \mathbb{Q}$ sayıları $x \in (a, b] \subset U$ olacak biçimde vardır. Bu tür $(a, b]$ aralıklarından sayılabilir çoklukta vardır ve

$$U = \bigcup \{(a, b] | a, b \in \mathbb{Q} \text{ ve } (a, b] \subset U\}$$

olduğundan $U \in \sigma(\mathcal{E})$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{B}^1 \subset \sigma(\mathcal{E})$. ■

Not. $\sigma(\mathcal{E})$ için (3.7)'de verilen tanım tipine matematikte sıkça rastlarız. Bu tanım bir dışsal tanımdır ve kurucu değildir; $\sigma(\mathcal{E})$ 'nin öğelerinin $\mathcal{E}$ 'nin öğelerinden nasıl kazanıldığını söylemez! Sıra sayılarının sınıfını Srs ile gösterelim. Şimdi $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E} \cup \mathcal{E}^c$ ($\mathcal{E}^c = \{E^c | E \in \mathcal{E}\}$), $\alpha \in Srs$ için

$$\mathcal{E}_{\alpha+1} := \left\{ \bigcup \mathcal{B} | \mathcal{B} \subset \mathcal{A}_\alpha, \sharp \mathcal{B} \leq \omega \right\} \cup \left\{ \left(\bigcup \mathcal{B} \right)^c | \mathcal{B} \subset \mathcal{A}_\alpha, \sharp \mathcal{B} \leq \omega \right\}$$

ve λ bir limit sıra sayısı ise $\mathcal{E}_\lambda := \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{E}_\alpha$ olarak açıklansın.

Teorem: $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcup_{\alpha < \aleph_1} \mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_{\aleph_1}$ (bkz [13], Teorem 3.6.9).

$\mathcal{B}^n$ 'nin gücünün $\mathfrak{c}$ olduğu gösterilebilir (bkz [13] Teorem 3.6.10). Bu, $A \subset \mathbb{R}^n$ altkümelerinin ezici çoğunluğunun Borel kümesi olmadığı anlamına gelir. İleride $\mathbb{R}^n$ 'de Lebesgue ölçülebilir kümelerin $\mathcal{L}^n$ ailesini tanıyacağız. $\sharp \mathcal{B}^n = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = \sharp \mathcal{L}^n$ geçerlidir. Yine de analizde karşılaştığımız $A \subset \mathbb{R}^n$ altkümelerinin neredeyse tümü Borel kümeleridir. Bu nedenle çoğu yazar $\mathcal{B}^n$ ile yetinir. ▲

Tanım 3.1.3 $\mathcal{H} \subset \mathfrak{P}(X)$ bir yarıhalka veya bir halka ve $v : \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ bir hacim olsun. I sayılabilir olmak üzere daima

$$\{A_k\}_{k \in I} \subset \mathcal{H} \text{ ayrık ve } \bigsqcup_{k \in I} A_k \in \mathcal{H} \text{ ise } v \left(\bigsqcup_{k \in I} A_k \right) = \sum_{k \in I} v(A_k) \quad (3.8)$$

sağlanıyorsa v hacmi σ -**toplamsal**dır denir. σ -toplamsal hacimlere bir **ölçü** denir. Tanım kümesi bir σ -cebiri olan σ -toplamsal hacimlere **ölçü** denir. Her $A \in \mathcal{H}$ için $v(A) < +\infty$ ise v hacmi **sonludur** denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için bir $A_n \in \mathcal{H}$, $v(A_n) < +\infty$ ve $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ olacak biçimde bulunabiliyorsa v hacmi σ -**sonludur** denir.

Şöyle de diyebiliriz: $v : \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ dönüşümüne, $v(\emptyset) = 0$ ve her sayılabilir ve ayrık $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$ ailesi için

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{H} \implies v \left(\bigsqcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} v(A_i)$$

sağlanıyorsa bir önölçüdür denir. Eğer $\mathcal{H}$ bir σ -cebiri ise (3.8)'deki $\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{H}$ koşulu otomatikman sağlanır. $v(\emptyset) = 0$ koşulu ile $v \equiv +\infty$ durumu önlenmiştir. Biz Önerme 3.2.1'de $v_n : \mathcal{Q}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ve $v_n : \mathcal{F}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ 'nin birer önölçü olduğunu kanıtlayacağız.

3.2 Lebesgue Ölçüsü

Bir önceki bölümde Jordan hacmini ve Riemann integrallerini ele aldık. $\mathbb{R}^n$ 'deki kutuların kümesini $\mathcal{Q}^n$ ile gösterdik. *Sonlu* sayıda kutuların birleşimlerine figür dedik ve figürlerin kümesini $\mathcal{F}^n$ ile gösterdik. Bir yandan okuru Ölçüler Kuramı'na da hazırlamayı düşündüğümüzden $\mathcal{Q}^n$ ve $\mathcal{F}^n$ 'nin küme işlemlerine göre yapılarına odaklandık. Böylece $\mathcal{Q}^n$ 'nin bir yarıhalka ve $\mathcal{F}^n$ 'nin ise $\mathcal{Q}^n$ 'nin ürettiği halka olduğunu, dd $\mathcal{F}^n = \rho(\mathcal{Q}^n)$ olduğunu kanıtladık. Herhangi bir $\mathcal{Y}$ yarıhalkasında hacim kavramını verdik ve yarıhalkalardaki hacimlerin, tek bir biçimde, ürettikleri $\rho(\mathcal{Y})$ halkasında bir hacme genişletilebildiğini kanıtladık. $Q = \prod_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle \in \mathcal{Q}^n$ kutusu için $v_n(Q) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ olarak açıklanan $v_n : \mathcal{Q}^n \rightarrow [0, +\infty)$ dönüşümünün bir hacim olduğunu kanıtladık ve bunu bir $v_n : \mathcal{F}^n \rightarrow [0, +\infty)$ hacmine genişlettik. Özetle $\emptyset \in \mathcal{F}^n$ ve $A, B \in \mathcal{F}^n$ ise $A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{F}^n$. Ayrıca $v_n(\emptyset) = 0$ ve $v_n(A \sqcup B) = v_n(A) + v_n(B)$. Her figür sonlu sayıda sınırlı kutunun birleşimi olarak sınırlıdır. Sonra v_n hacmini, sınırlı kümelerden oluşan bir $\mathcal{J}^n$ halkasında bir $j_n : \mathcal{J}^n \rightarrow [0, +\infty)$ hacmine genişlettik. Bunu antik çağlarda da bilinen, içeriden ve dışarıdan tüketme yöntemiyle yaptık. Her sınırlı A için bir $\underline{j}_n(A)$ iç hacmi ve bir $\bar{j}_n(A)$ dış hacmi tanımladık ve $\underline{j}_n(A) = \bar{j}_n(A)$ olması durumunda A 'nın Jordan ölçülebilir olduğunu söyledik; bu ortak değeri ise A 'nın Jordan hacmi olarak açıklayıp bunu $j_n(A)$ ile gösterdik. Ayrıca bir A kümesinin Jordan ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşulun her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $F_\varepsilon, F^\varepsilon$ figürlerinin $F_\varepsilon \subset A \subset F^\varepsilon$ ve $v_n(F^\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmesi olduğunu kanıtladık (bkz. Önsav 2.2.5). Ancak $\mathcal{J}^n$ yeterince zengin değildir; sınırsız hiçbir küme içermediği gibi her sınırlı açık kümeyi bile içermez!

Biz $\mathcal{J}^n \subset \mathcal{L}^n \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ koşulunu sağlayan bir $\mathcal{L}^n$ ailesi ve v_n, j_n hacimlerini genişleten bir $\lambda_n : \mathcal{L}^n \rightarrow [0, +\infty]$ dönüşümünün peşindeyiz. $\mathcal{L}^n \neq \emptyset$ ailesinin bir σ -cebiri olmasını ve λ_n 'nin bir ölçü olmasını istiyoruz. $\mathcal{L}^n$ σ -cebirini tanımlarken bize $\mathcal{F}^n$ 'den $\mathcal{J}^n$ 'e geçiş yol gösterecektir. İster Jordan ölçüsünden Lebesgue ölçüsüne geçişte ister Riemann integralinden Lebesgue integraline geçişte olsun temel düşünce *sonludan sayılabilirliğe geçmek* ayrıca fonksiyonlar ve kümelerimizin *sınırsız* olmasına izin vermek olacaktır. $\mathcal{F}^n$ sonlu kutuların birleşimi olan figürlerin kümesidir. Bunun yerini sayılabilir kutuların birleşimi olan $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ alacaktır.

Önerme 3.2.1 $v_n : \mathcal{Q}^n \rightarrow [0, +\infty)$ hacmi bir önölçüdür: I sayılabilir, $Q, Q_i \in \mathcal{Q}^n$ ve $Q = \bigsqcup_{i \in I} Q_i$ ise $v_n(Q) = \sum_{i \in I} v_n(Q_i)$.

Kanıt. I sonlu ise savımız, v_n bir hacim olduğu için doğrudur. Şimdi I sayılabilir sonsuz olsun; $I = \mathbb{N}$ alabiliriz. v_n 'nin monotonluğundan

$$\sum_{i=0}^{+\infty} v_n(Q_i) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k v_n(Q_i) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_n \left(\bigsqcup_{i=0}^k Q_i \right) \leq v_n(Q). \quad (3.9)$$

Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Açık P_i ve kompakt K kutularını, $Q_i \subset P_i$, $K \subset Q$ ve

$$\sum_{i=0}^{+\infty} v_n(P_i) < \sum_{i=0}^{+\infty} v_n(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad v_n(Q) < v_n(K) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.10)$$

olacak biçimde seçebiliriz (bkz s.56). Sonlu sayıda açık $P_0, \dots, P_m$ kutuları K 'yi örter; bu ve v_n 'nin monotonluk ve alttoplamsallığından, (3.10) ile

$$v_n(Q) < v_n(K) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=0}^m v_n(P_i) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=0}^{+\infty} v_n(Q_i) + \varepsilon.$$

Böylece $\varepsilon \searrow 0$ ile $v_n(Q) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} v_n(Q_i)$; bu ve (3.9) savı verir. ■

Önerme 3.2.2 $v : \mathcal{F}^n \rightarrow [0, +\infty)$ hacmi bir önölçüdür.

Kanıt. $F, F_i \in \mathcal{F}^n$ ($i \in I$) ve $F = \bigsqcup_{i \in I} F_i$ olsun. I sonlu ise savımız biliniyor. I sonsuz ve $I = \mathbb{N}$ olsun. Teorem 2.1.5'ten dolayı ayırık $Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{Q}^n$ kutuları $F = \bigsqcup_{j=1}^k Q_j$ olacak biçimde bulunabilir. Yine aynı teoremden her i için, $Q_{i,\nu} \in \mathcal{Q}^n$ olmak üzere, $F_i = \bigsqcup_{\nu=1}^{\nu_i} Q_{i,\nu}$ olarak yazılabilir. Dolayısıyla

$$Q_j = \bigsqcup_{i=0}^{+\infty} (Q_j \cap F_i) = \bigsqcup_{i=0}^{+\infty} \bigsqcup_{\nu=1}^{\nu_i} (Q_j \cap Q_{i,\nu}).$$

Önerme 3.2.1'den $v(Q_j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu_i} v(Q_j \cap Q_{i,\nu}) = \sum_{i=0}^{+\infty} v(Q_j \cap F_i)$. Böylece

$$v(F) = \sum_{j=1}^k v(Q_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{+\infty} v(Q_j \cap F_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^k v(Q_j \cap F_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} v(F_i).$$

$A \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ olsun. Tanım gereği monoton artan bir $(F_k) \subset \mathcal{F}^n$ dizisi ile $A = \bigcup F_k$. Her bir F_k sonlu sayıda Q_{ki} kutusunun birleşimi olduğundan A sayılabilir kutunun birleşimidir. Tersine A kümesi sayılabilir $Q_0, Q_1, Q_3, \dots$

kutularının birleşimi olsun. Burada bazı kutuların boş olmasına izin veriyoruz; böylece A 'nın sonlu sayıda kutuların birleşimi olması da ele alınmış olur. $F_k := \bigcup_{0 \leq i \leq k} Q_i$ olarak açıklarsak her $F_k \in \mathcal{F}^n$ ve $F_i \uparrow \bigcup Q_i \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ olur. Özetle

$$\mathcal{F}^{n\uparrow} = \left\{ \bigcup_{i \in I} Q_i \mid Q_i \in \mathcal{Q}^n, I \text{ sayılabilir} \right\} \quad (3.11)$$

olur.

Lemma 3.2.3 *Her $A \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ sayılabilir çoklukta ayrık kutunun birleşimi olarak yazılabilir.*

Kanıt. $A = \bigcup_{i=0}^{+\infty} Q_i$ olsun. $A_0 := Q_0$ ve $k > 0$ içinse $A_k = Q_k \setminus (Q_0 \cup \dots \cup Q_{k-1})$ olsun. $\{A_k\}$ ailesi ayrıktır ve $A = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} A_k$. Diğer yandan her bir $A_k \in \mathcal{F}^n$ bir figürdür ve ayrık kutuların birleşimi olarak yazılabilir (bkz.2.1.3). İşimiz bitmiştir. ■

Önerme 3.2.4 *Her açık U kümesi $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'dedir ve U açık kümesi, kendine düşen sayılabilir çoklukta kapalı kutunun birleşimi olarak yazılabilir.*

Kanıt. Köşeleri rasyonel sayılar olan $\{Q[a, b] \mid a, b \in \mathbb{Q}^n\}$ kapalı kutuların ailesi sayılabilir. Her $x \in U$ için bu aileden bir Q_x kapalı kutusu $x \in Q_x \subset U$ olacak biçimde seçilebilir. $\{Q_x \mid x \in U\}$ ailesi sayılabilir, her bir Q_x kapalı ve $U = \bigcup_{x \in U} Q_x$. Dolayısıyla $U \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ve savımız Önsav 3.2.3 ve kanıtından çıkar. ■

$\mathcal{F}^{n\uparrow} \subset \mathcal{L}^n$ olacağından, oluşturacağımız $\mathcal{L}^n$ σ -cebiri Önerme 3.2.4'ten dolayı $\mathbb{R}^n$ 'deki tüm açık kümeleri ve onların tümleyenleri olan tüm kapalı kümeleri içerecektir. Bu iyi bir şey; bu kümeler analizde çok önemlidirler. $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'yi içeren her σ -cebiri $\mathcal{B}^n$ 'yi de içerecektir.

Uyarı 3.2.5. (1) Her kapalı küme $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'de değildir. Örneğin K kapalı topu verilsin. $Q \subset K$ koşulunu sağlayan bir Q kutusu ∂K sınırından en fazla 2^n nokta içerir. Dolayısıyla K 'ye düşen Q_k kutuları nasıl seçilirse seçilsinler $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ birleşimi ∂K sınırından en fazla sayılabilir çoklukta nokta içerir. Bu durumda $K \subsetneq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ (∂K sayılamaz!), dolayısıyla $K \notin \mathcal{F}^{n\uparrow}$! Veya düzlemdeki $L := \{(x, x) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ kapalı doğru parçası $\mathcal{F}^{2\uparrow}$ 'de değildir; çünkü bu doğru parçasına düşen kutularımız tek noktalık $\{(x, x)\}$ kümelerdir ve doğru parçamız sayılamaz!¹ Her $k \in \mathbb{N}^*$ için L doğru parçasını birbirine eşit 2^k parçaya bölelim ve bu parçaları köşegen kabul eden kapalı karelerin

¹ L doğru parçası elbette Jordan ölçülebilir ve $j_2(L) = 0$! Buradaki problem, seçilmiş bir koordinat sisteminden ve kenarları bu koordinatlara koşut kutulardan yola çıkmamızdan kaynaklanır.

birleşimine S_k diyelim. $S_k \in \mathcal{F}^{2\uparrow}$, $S_{k+1} \subset S_k$ ve $\bigcap_k S_k = L \notin \mathcal{F}^{2\uparrow}$. Demek ki $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'nin sayılabilir öğelerinin arakesitlerinin $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'de olması gerekmez; ancak sonlu arakesitlerin yine $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'de olduğunu az ileride öğreneceğiz.

(2) Şimdi düzlemde 0-merkezli B_1, B_2 açık dairelerini alalım. 0-merkezli 1 yarıçaplı çemberimiz C_1 olsun. $B_1, B_2 \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$, ancak $B_2 \setminus B_1 \notin \mathcal{F}^{n\uparrow}$! Çünkü $B_2 \setminus B_1$ 'e düşen herhangi bir Q kutusu için $Q \cap C_1$ en fazla bir nokta içerir. Dolayısıyla $B_2 \setminus B_1$ kümesi sayılabilir kutunun birleşimi olarak yazılamaz (C_1 kümesi sayılamaz!). $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ bir halka değildir!

$K \subset \mathbb{R}^n$ bir kapalı topsa Uyarı 3.2.5 (1)'den dolayı $K \notin \mathcal{F}^{n\uparrow}$. Diğer yandan Önerme 3.2.4'ten dolayı $\mathbb{R}^n$ ve K^c açık kümeleri $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'dedir. Sonuçta $\mathbb{R}^n, K^c \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$, ancak $K = (K^c)^c = \mathbb{R}^n \setminus K^c \notin \mathcal{F}^{n\uparrow}$. Dolayısıyla $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ bir halka ve bir σ -cebiri değildir!

Teorem 3.2.6 $\mathcal{R} \subset \mathfrak{P}(X)$ halkasında $v : \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ hacmi verilsin. Aşağıdaki önermeler için (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) $\implies$ (iv) geçerlidir. Eğer v **sonlu**, dd her $A \in \mathcal{R}$ için $v(A) < +\infty$ ise dört önerme de birbirine denktir.

(i) v hacmi σ -toplamsaldır,

(ii) v , σ -alttoplamsaldır, dd her $(A_k) \subset \mathcal{R}$ dizisi için

$$A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{R} \text{ ise } v(A) = v\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v(A_k),$$

(iii) v alttan süreklidir, dd her $(A_k) \subset \mathcal{R}$ dizisi için

$$A_k \uparrow A \in \mathcal{R} \text{ ise } v(A_k) \uparrow v(A),$$

(iv) v üstten süreklidir, dd her $(A_k) \subset \mathcal{R}$ dizisi için

$$A_k \downarrow A \in \mathcal{R} \text{ ve bir } l \text{ için } v(A_l) < +\infty \text{ ise } v(A_k) \downarrow v(A),$$

Kanıt. (ii) $\implies$ (i): $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ ayrık ailesi verilsin ve $A := \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{R}$ olsun. v hacmi monoton ve sonlu toplamsal olduğundan her n için

$$\sum_{k=0}^n v(A_k) = v\left(\bigsqcup_{k=0}^n A_k\right) \leq v(A).$$

Buradan $n \rightarrow +\infty$ ile $\sum_{k=0}^{+\infty} v(A_k) \leq v(A)$. (ii)'den $v(A) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v(A_k)$. İşimiz biter.

(i) $\implies$ (iii): $(A_k) \subset \mathcal{R}$ bir artan dizi ve $A_k \uparrow A \in \mathcal{R}$ olsun. $A'_0 := A_0$ ve $k \geq 1$ için $A'_k := A_k \setminus A_{k-1}$ olsun. $\{A'_k\} \subset \mathcal{R}$ bir ayrık ailedir, $A = \bigsqcup_{k \geq 0} A'_k$

ve her n için $A_n = \bigsqcup_{k=0}^n A'_k$ geçerlidir. $v(A_n) = \sum_{k=0}^n v(A'_k)$ olduğundan (i) ile

$$v(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} v(A'_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n v(A'_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v(A_n).$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii): $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ ve $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{R}$ olsun. $B_k := \bigcup_{i=0}^k A_i$ dersek $(B_k) \subset \mathcal{R}$ bir artan dizi ve $B_k \uparrow A$. Ayrıca $v(B_k) \leq \sum_{i=0}^k v(A_i)$. Bu ve (iii) ile

$$v(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v(B_k) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k v(A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} v(A_i).$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): $(A_k) \subset \mathcal{R}$ bir azalan dizi, $A_k \downarrow A \in \mathcal{R}$ ve gbk $v(A_0) < +\infty$ olsun. $B_k := A_0 \setminus A_k \in \mathcal{R}$ dersek $(B_k) \subset \mathcal{R}$ bir artan dizidir ve $B_k \uparrow A_0 \setminus A \in \mathcal{R}$. (iii)'ten dolayı $\lim v(B_k) = v(A_0 \setminus A) = v(A_0) - v(A)$ olur. Bu ve $v(B_k) = v(A_0) - v(A_k)$ 'den $v(A_k) \downarrow v(A)$ elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): v sonlu, $(A_k) \subset \mathcal{R}$ bir artan dizi ve $A_k \uparrow A \in \mathcal{R}$ olsun. $B_k := A \setminus A_k$ olmak üzere $(B_k) \subset \mathcal{R}$ bir azalan dizidir ve $B_k \downarrow \emptyset \in \mathcal{R}$. (iv)'ten dolayı $\lim v(B_k) = 0$ olur. Bu ve $v(B_k) = v(A) - v(A_k)$ savı verir. ■

Sonuç 3.2.7 $v_n : \mathcal{F}^n \rightarrow [0, +\infty)$ hacmi σ -toplamsal, σ -alttoplamsal, alttan ve üstten süreklidir.

Anımsayalım: $\mathcal{Q}^n$ 'deki v_n hacminden yola çıkarak $\mathcal{F}^n$ halkasında her $F \in \mathcal{F}^n$ için bir $v_n(F)$ hacmi tanımladık. Bunun için önce F 'yi sonlu sayıda ayrık $Q_1, \dots, Q_k$ kutularına nasıl parçalarsak parçalayalım $\sum_{1 \leq i \leq k} Q_i$ değerinin aynı olduğunu gösterdik. Sonra $\mathcal{F}^n$ 'den $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'e geçtik. Bu kez benzer biçimde bir $F \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ kümesini sayılabilir çoklukta ayrık $Q_0, Q_1, \dots$ kutularına nasıl parçalarsak parçalayalım, $\sum_{i \in \mathbb{N}} v_n(Q_i)$ değerinin, parçalanıştan bağımsız olduğunu kanıtlayacağız. Doğal olarak bu $\lambda_n(F)$ değeri F 'nin Lebesgue ölçüsü olacaktır. $\mathcal{F}^{n\uparrow} \subsetneq \mathcal{L}^n$ olacak ve $\mathcal{L}^n$ 'yi $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ üzerinden kazanacağız. Dolayısıyla önce $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'nin yapısını tanıyalım.

Önerme 3.2.8 (i) $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'nin sonlu sayıda öğelerinin arakesiti $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'dedir.

(ii) $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'nin sayılabilir çoklukta öğelerinin birleşimi de $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'dedir.

(iii) $A \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ve $B \in \mathcal{F}^n$ ise $A \setminus B \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$.²

Kanıt. (i) $A, B \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ve monoton artan $(A_k), (B_k) \subset \mathcal{F}^n$ dizileriyle $A_k \uparrow A$ ve $B_k \uparrow B$ ise $(A_k \cap B_k) \subset \mathcal{F}^n$ dizisi de monoton artandır ve $A_k \cap B_k \uparrow A \cap B$.

² $A, B \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ise $A \setminus B \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ olması gerekmez, bkz. Uyarı 3.2.5 (2).

(ii) Her $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \in \mathcal{F}^\uparrow$ kümesi sayılabilir çoklukta $\{Q_{ij}\}_{j \in \Gamma_i}$ kutusunun birleşimidir. Dolayısıyla $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ kümesi sayılabilir çoklukta Q_{ij} kutularının birleşimi olarak $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'dedir.

(iii) $(A_k) \subset \mathcal{F}^n$ monoton artan, $A_k \uparrow A \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ve $B \in \mathcal{F}^n$ ise $A_k \setminus B \in \mathcal{F}^n$, $(A_k \setminus B) \uparrow (A \setminus B) \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ olur. ■

$(A_k) \subset \mathcal{F}^n$ monoton artansa $(v_n(A_k)) \subset \mathbb{R}_+$ monoton artan, dolayısıyla $[0, +\infty]$ 'da yakınsaktır.

Lemma 3.2.9 $(A_k), (B_k) \subset \mathcal{F}^n$ monoton artan dizilerinin ikisi de A 'ya yakınsaksa $\lim v_n(A_k) = \lim v_n(B_k)$.

Kanıt. $(A_k), (B_k) \subset \mathcal{F}^n$ monoton artan dizilerinin ikisi de A 'ya yakınsak olsun. $(v_n(A_k))$ ve $(v_n(B_k))$ 'ler $[0, +\infty]$ 'de monoton artan diziler olarak yakınsaktırlar. k 'yi keyfi seçip sabit tutarsak $A_k \cap B_j \uparrow_{j=0}^{+\infty} A_k$ olduğundan Teorem 3.2.6 (iii) ile

$$v_n(A_k) = \lim_{j \rightarrow +\infty} v_n(A_k \cap B_j)$$

olur. Buradan $v_n(A_k \cap B_j) \leq v_n(B_j)$ eşitsizliği ile

$$v_n(A_k) = \lim_{j \rightarrow +\infty} v_n(A_k \cap B_j) \leq \lim_j v_n(B_j)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $k \rightarrow +\infty$ limitine geçerse $\lim_k v_n(A_k) \leq \lim_j v_n(B_j)$ olur. Rollerini değiştirsek $\lim_k v_n(A_k) \geq \lim_j v_n(B_j)$, dolayısıyla $\lim_k v_n(A_k) = \lim_j v_n(B_j)$ elde ederiz. ■

Tanım 3.2.10 $(A_k) \subset \mathcal{F}^n$ ve $A_k \uparrow A \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ise

$$\lambda_n(A) := \lim_k v_n(A_k)$$

olarak açıklanır. $\lambda_n(A)$ 'ya A 'nın **Lebesgue ölçüsü** denir.

Önsav 3.2.9'dan dolayı bu tanım kusursuzdur. Diğer yandan $A \in \mathcal{F}^n$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için $A_i = A$ alırsak $A_i \uparrow A$ ve $\lambda_n(A) = \lim_k v_n(A_k) = v_n(A)$ olur. Dolayısıyla $\lambda_n|_{\mathcal{F}^n} = v_n$, dd λ_n dönüşümü v_n 'yi $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'e genişletir.

$v_n : \mathcal{F}^n \rightarrow [0, +\infty)$ önölçüsünü bir $\lambda_n : \mathcal{F}^{n\uparrow} \rightarrow [0, +\infty]$ dönüşümüne genişlettik. $(F_k) \subset \mathcal{F}^n$ bir monoton artan dizi ve $F_k \uparrow A$ ise $\lambda_n(A) := \lim v_n(F_k)$ olarak açıklandı. Bu (F_k) 'nın seçiminden bağımsızdır. Bunun bir sonucu şudur: A 'yı ayrık $Q_0, Q_1, \dots$ kutularının birleşimi olarak nasıl yazarsak yazalım, $A_k := \bigsqcup_{0 \leq i \leq k} Q_i$ olmak üzere daima

$$\lambda_n(A) = \lim_k v_n(A_k) = \lim_k \left(\sum_{0 \leq i \leq k} v_n(Q_i) \right) = \sum_{i \geq 0} v_n(Q_i) = \sum_{i \geq 0} \lambda_n(Q_i). \quad (3.12)$$

Teorem 3.2.11 $\lambda_n : \mathcal{F}^{n\uparrow} \rightarrow [0, +\infty]$ dönüşümü:

- (i) **Monotondur:** Eğer $A, B \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ve $A \subset B$ ise $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(B)$,
- (ii) **(Sonlu) Toplamsaldır:** Eğer $A, B \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ve $A \cap B = \emptyset$ ise $\lambda_n(A \sqcup B) = \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$,
- (iii) **Alttaan süreklidir:** Eğer $(A_k) \subset \mathcal{F}^{n\uparrow}$ monoton artan ve $A_k \uparrow A$ ise $\lambda_n(A_k) \uparrow \lambda_n(A)$,
- (iv) λ_n , **σ -alttoplamsaldır:** Eğer $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}^{n\uparrow}$ sayılabilir bir aile ise $\lambda_n(\bigcup_{i \in I} A_i) \leq \sum_{i \in I} \lambda_n(A_i)$,
- (v) λ_n , **σ -toplamsaldır:** Eğer $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}^{n\uparrow}$ sayılabilir ve ayrık aile ise $\lambda_n(\bigsqcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \lambda_n(A_i)$.

Kanıt. (i) $A, B \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$, $A \subset B$ olsun. $A_k, B_k \in \mathcal{F}^n$ olmak üzere $A_k \uparrow A$ ve $B_k \uparrow B$ olsun. Bu durumda $(A_k \cup B_k) \uparrow B$ olduğundan Önsav 3.2.9 ile $\lambda_n(A) = \lim \lambda_n(A_k) \leq \lim \lambda_n(A_k \cup B_k) = \lambda_n(B)$.

(ii) $A, B \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ayrık, $A_k, B_k \in \mathcal{F}^n$ ve $A_k \uparrow A$ ve $B_k \uparrow B$ olsun. $(A_k \sqcup B_k) \uparrow (A \sqcup B)$ ve $\lambda_n(A_k \sqcup B_k) = \lambda_n(A_k) + \lambda_n(B_k)$; limite geçerse $\lambda_n(A \sqcup B) = \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$ olur.

(iii) $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ve $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ olsun. Önerme 3.2.8 (ii)'den $A \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$. Her $i \in \mathbb{N}$ için monoton artan bir $(A_{ij})_{j \geq 0} \subset \mathcal{F}^n$ dizisi $A_{ij} \uparrow_{j=0}^{+\infty} A_i$ olacak biçimde vardır. $k \geq 1$ için $B_k := \bigcup_{i,j \leq k} A_{ij}$ olarak açıklansın. $(B_k) \subset \mathcal{F}^n$ ardından tümevarımla her $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n(\bigcup_{i=0}^k A_i) \leq \sum_{i=0}^k \lambda_n(A_i)$ olduğu gösterilir. Bu eşitsizlik ve λ_n alttaan sürekli olduğundan $k \rightarrow +\infty$ ile $\lambda_n(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_n(A_i)$.

(v) Her şeyden önce (ii)'den tüme varımla $\lambda_n(\bigcup_{i=0}^k A_i) = \sum_{i=0}^k \lambda_n(A_i)$ elde edilir. Diğer yandan $A := \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$ ve $C_k := \bigcup_{i=0}^k A_i$ olmak üzere Önerme 3.2.8 (ii)'den $C_k, A \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ve monotonluktan $\lambda_n(C_k) \leq \lambda_n(A)$. Dolayısıyla

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_n(A_i) = \lim_k \sum_{i=0}^k \lambda_n(A_i) = \lim_k \lambda_n(C_k) \leq \lambda_n(A).$$

Bu eşitsizliğin ters yönü (iv)'te kanıtlandı. ■

Nasıl Devam Etmeli?

Şimdilik her açık kümenin Lebesgue ölçüsünü tanımladık. $\mathbb{R}^n$ 'i sayılabilir çoklukta sağdan yarıaçık $K[a, 1), a \in \mathbb{Z}^n$ küplerinin birleşimi olarak yazabiliriz. Her bir $K[a, 1)$ küpümüzün Lebesgue ölçüsü 1'dir. Dolayısıyla $\lambda_n(\mathbb{R}^n) = +\infty$ ve λ_n σ -sonludur.

Bir an için, Jordan ölçüsüne koşut olarak, $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için iç ve dış ölçülerini

$$\underline{\lambda}_n(A) := \sup_{F \in \mathcal{F}^{n\uparrow}, F \subset A} \lambda_n(F) \text{ ve } \bar{\lambda}_n(A) := \inf_{A \subset F \in \mathcal{F}^{n\uparrow}} \lambda_n(F) \quad (3.13)$$

olarak açıkladığımızı varsayalım.

$Q = [0, 1] \times [0, 1]$ ve $A = Q \setminus \mathbb{Q}^2$ olsun. $B := Q \cap \mathbb{Q}^2$ kümesi sayılabilir; $B = \{r_1, r_2, \dots\}$ olsun. Sayılabilir $\{r_i\}$ bozuk kutusunun birleşimi olarak $B \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ve $\lambda_n(B) = \sum_i \lambda_n(\{r_i\}) = 0$ olacaktır. Bu durumda, Q ölçülebilir olduğundan $A = Q \setminus B$ de ölçülebilir ve $Q = A \sqcup B$ olduğundan $1 = j_n(Q) = \lambda_n(Q) = \lambda_n(A) + \lambda_n(B) = \lambda_n(A)$ olmalıdır. $\bar{\lambda}_n(A) = 1$ aşıkardır. Ancak A 'ya düşen her kutu bozuk olduğundan $\underline{\lambda}_n(A) = 0$ olur. Dolayısıyla $\underline{\lambda}_n(A) \neq \bar{\lambda}_n(A)$. Burada işi bozan (3.13)'teki $\underline{\lambda}_n(A)$ tanımı; dolayısıyla (3.13) 'teki iç ölçü tanımından vazgeçmeliyiz!

Önümüzde iki yol vardır. Birincisi, hacim için geçerli olan (2.16) eşitliğinden esinlenerek, *iç ölçü tanımını dış ölçü üzerinden vermek*. Bu Lebesgue'in izlediği yoldur. $A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir sınırlı küme olsun. A kümesini içeren bir Q kutusu seçip

$$\underline{\lambda}_n(A) := \bar{\lambda}_n(Q) - \bar{\lambda}_n(Q \setminus A) = \lambda_n(Q) - \bar{\lambda}_n(Q \setminus A) = v_n(Q) - \bar{\lambda}_n(Q \setminus A)$$

olarak açıklamak. Bu tanım Q 'nun seçiminden bağımsızdır. Burada Q kutusu yerine A 'yı içeren herhangi bir sınırlı U açık kümesi alınabilir; bunlar Lebesgue ölçülebilir ve ölçüleri sonludur. Yukarıdaki örneğimizde $v_2(Q) = 1$ ve $\bar{\lambda}_2(Q \setminus A) = 0$ olduğundan, bu yeni tanımla $\underline{\lambda}_n(A) = \bar{\lambda}_n(A) = 1$ olur, dd A Lebesgue ölçülebilir ve ölçüsü 1'dir.

$\mathbb{R}^n$ 'nin topolojisini ön plana çıkaran bir diğer yaklaşım vardır. $U \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme ise $\lambda_n(U) := \sup \{v_n(F) | F \in \mathcal{F}^n, F \subset U\}$ ve K bir kompakt küme ise $\lambda_n(K) := \inf \{v_n(F) | K \subset \overset{\circ}{F} \in \mathcal{F}^n\}$ olarak açıklanır. Ardından herhangi bir sınırlı $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için

$$\bar{\lambda}_n(A) := \inf \{\lambda_n(U) | A \subset U, U \text{ açık}\}$$

ve

$$\underline{\lambda}_n(A) := \sup \{\lambda_n(K) | K \subset A, K \text{ kompakt}\}$$

olarak açıklanır. $\bar{\lambda}_n(A) = \underline{\lambda}_n(A)$ ise A kümesi Lebesgue ölçülebilir denir ve bu ortak değer $\lambda_n(A)$ ile gösterilir ve A 'nın Lebesgue ölçüsüdür denir. Şimdi $A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir altküme olsun. B_r , 0-merkezli r yarıçaplı açık topumuz olmak üzere her $r > 0$ için $A \cap B_r$ Lebesgue ölçülebilir ise A Lebesgue ölçülebilir denir ve $\lambda_n(A) := \lim_{r \rightarrow +\infty} (A \cap B_r)$ olarak açıklanır. Ancak bu yaklaşım herhangi bir X kümesine aktarılamaz. Bir diğer yol iç ölçüden

tümüyle vazgeçip yalnızca $\bar{\lambda}_n$ dış ölçüsüyle çalışmak. Carathéodory bu yolu izler. 1914'te şu teoremi kanıtlamıştır: $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue ölçülebilirse

$$\forall B \subset \mathbb{R}^n \quad (\bar{\lambda}_n(B) = \bar{\lambda}_n(A \cap B) + \bar{\lambda}_n(B \setminus A)). \quad (3.14)$$

Bu eşitlik Lebesgue ölçülebilir kümelerin tanımı olarak seçildiğinde bir kay-bımız olmadığını, temel teoremlerin kanıtlarının daha kısa ve daha basit hale geldiğini belirtir. Son zamanlarda Carathéodory'nin yaklaşımı iyice benim-senmiştir.

Tanım 3.2.12 $A \subset \mathbb{R}^n$ için

$$\bar{\lambda}_n(A) := \inf_{A \subset F \in \mathcal{F}^{n\uparrow}} \lambda_n(F).$$

Teorem 3.2.13 $\bar{\lambda}_n : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ dönüşümü bir **dış ölçüdür**, dd $\bar{\lambda}_n(\emptyset) = 0$ ve her $A \subset X$ ve her sayılabilir $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{P}(X)$ ailesi için³

$$A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \implies \bar{\lambda}_n(A) \leq \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_n(A_i), \text{ özellikle} \quad (3.15)$$

$$\bar{\lambda}_n \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \leq \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_n(A_i). \quad (3.16)$$

Ayrıca $\bar{\lambda}_n|_{\mathcal{F}^{n\uparrow}} = \lambda_n$.

Kanıt. $\lambda_n : \mathcal{F}^{n\uparrow} \rightarrow \mathbb{R}$ 'nin monotonluğundan her $A \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ için $\bar{\lambda}_n(A) = \lambda_n(A)$ ve $A \subset B$ için $\bar{\lambda}_n(A) \leq \bar{\lambda}_n(B)$ olduğu aşıkardır. $\lambda_n(\emptyset) = 0$ olduğundan $\bar{\lambda}_n(\emptyset) = 0$ olur.

$\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{P}(X)$ bir sayılabilir aile olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\varepsilon_i > 0$ pozitif sayılarını $\sum_{i \in I} \varepsilon_i \leq \varepsilon$ olacak biçimde seçelim. $\bar{\lambda}_n$ 'nin tanımından $B_i \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ kümelerini $A_i \subset B_i$ ve

$$\lambda_n(A_i) \leq \lambda_n(B_i) \leq \lambda_n(A_i) + \varepsilon_i$$

olacak biçimde seçebiliriz. Önerme (3.2.8) (ii) ve Teorem 3.2.11 (iv) ile

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{F}^{n\uparrow} \text{ ve } \bar{\lambda}_n \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \leq \lambda_n \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \leq \sum_{i \in I} \lambda_n(A_i) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\bar{\lambda}_n \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \leq \sum_{i \in I} \lambda_n(A_i)$ olur. ■

Biz de Carathéodory gibi dış ölçü üzerinden ilerleyeceğiz; ancak yaklaşımımızın sağduyumuzda ve pratığımızda bir karşılığının olmasını istiyoruz.

İlk önce bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Jordan ölçülebilirliği için, Önsav 2.2.5'ten yararlanarak, yalnızca $\bar{j}_n$ dış hacmini kullanan bir ölçüt verelim.

³ $\inf \emptyset = +\infty!$.

Lemma 3.2.14 $A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı kümesi için aşağıdaki savlar denktirler:

- (i) A Jordan ölçülebilir.
- (ii) Her $\varepsilon > 0$ için $A', A'' \in \mathcal{F}^n$ figürleri $A \subset A', A' \setminus A \subset A''$ ve $v_n(A'') \leq \varepsilon$ olacak biçimde vardır. Bu durumda $j_n(A) = \bar{j}_n(A)$.

Kanıt. (i) $\implies$ (ii): $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Önsav 2.2.5'ten $F'', F' \in \mathcal{F}^n$ figürleri $F'' \subset A \subset F'$ ve $v_n(F' \setminus F'') \leq \varepsilon$ olacak biçimde seçilebilir. $A' := F'$ ve $A'' := F' \setminus F'' \in \mathcal{F}^n$ alırsak $A \subset A', A' \setminus A \subset A''$ ve $v_n(A'') \leq \varepsilon$ olur.

(ii) $\implies$ (i): Ölçüt sağlansın. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $A', A'' \in \mathcal{F}^n$ figürleri $A \subset A', A' \setminus A \subset A''$ ve $v_n(A'') \leq \varepsilon$ olacak biçimde seçilsin. $F^\varepsilon := A'$ ve $F_\varepsilon := A' \setminus A''$ alırsak $F_\varepsilon \subset A \subset F^\varepsilon$, $F^\varepsilon \setminus F_\varepsilon \subset A''$ ve $v_n(F^\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq v_n(A'') \leq \varepsilon$ olur. Önsav 2.2.5'ten A Jordan ölçülebilir, dolayısıyla $j_n(A) = \bar{j}_n(A)$. ■

Önsavın (ii) koşulu özetle şunu söyler: Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık A 'yı içeren bir A' figürünü $\bar{j}_n(A' \setminus A) \leq \varepsilon$ olacak biçimde bulabiliriz. $v_n, \mathcal{F}^n$ ikilisinden $\lambda_n, \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ikilisine geçtiğimizde aşağıdaki tanıma ulaşırız.

Tanım 3.2.15 $A \subset \mathbb{R}^n$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $A', A'' \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ kümeleri $A \subset A', A' \setminus A \subset A''$ ve $\lambda_n(A'') \leq \varepsilon$ olacak biçimde bulunabiliyorsa A kümesi **Lebesgue ölçülebilir** denir. $\mathbb{R}^n$ 'deki Lebesgue ölçülebilir kümelerin kümesini $\mathcal{L}^n$ ile göstereceğiz ve her $A \in \mathcal{L}^n$ için

$$\lambda_n(A) := \bar{\lambda}_n(A)$$

olarak açıklayacağız.

$\bar{\lambda}_n(A' \setminus A) \leq \lambda_n(A'')$ olduğundan A 'nın Lebesgue ölçülebilir olması şu anlama gelir: A kümesine A 'yı kapsayan $A' \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ kümeleriyle istediğimiz kadar yaklaşabiliriz; bundan kastedilense her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, A 'yı içeren bir $A' \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ kümesinin $\bar{\lambda}_n(A' \setminus A) \leq \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmesidir. Bunun geometrik algımızda bir karşılığı vardır.

Biz $\mathcal{L}^n$ 'nin bir σ -cebiri ve $\lambda_n : \mathcal{L}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ 'nın bir ölçü olduğunu kanıtlayacağız.

Lemma 3.2.16 $A \in \mathcal{L}^n$, $A', A'' \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$, $A' \setminus A'' \subset A \subset A'$ ve $\lambda_n(A'') \leq \varepsilon$ ise

$$\lambda_n(A') - \varepsilon \leq \lambda_n(A) \leq \lambda_n(A').$$

Kanıt. A, A', A'' savdaki gibi olsunlar ve savın koşulunu sağlasınlar. $A \subset A'$ ve tanımlardan $\lambda_n(A) = \bar{\lambda}_n(A) \leq \lambda_n(A')$. Şimdi $A \subset B \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ olsun. Bu durumda $A' \subset A'' \cup B$ olur. Şimdi $A', A'', B, B \cup A''$ kümelerinin her biri $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'de olduğundan Teorem 3.2.13 ile

$$\lambda_n(A') \leq \lambda_n(B \cup A'') \leq \lambda_n(B) + \lambda_n(A'') \leq \lambda_n(B) + \varepsilon.$$

Dolayısıyla $A \subset B \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ koşulunu sağlayan her B için $\lambda_n(A') - \varepsilon \leq \lambda_n(B)$. Bu B 'ler üzerinden infimum alırsak $\lambda_n(A') - \varepsilon \leq \lambda_n(A)$ olur ve işimiz biter. ■

Lemma 3.2.17 $A, B \in \mathcal{L}^n$ ayrık salar $\lambda_n(A \sqcup B) \geq \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$.

Kanıt. $A, B \in \mathcal{L}^n$ kümeleri ayrık olsunlar ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $A', A'', B', B'' \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ kümelerini $A' \setminus A'' \subset A \subset A', B' \setminus B'' \subset B \subset B', \lambda_n(A'') \leq \varepsilon/4$ ve $\lambda_n(B'') \leq \varepsilon/4$ olacak biçimde seçelim. Önsav 3.2.16'dan $\lambda_n(A \sqcup B) \geq \lambda_n(A' \cup B') - \varepsilon/2$. Teorem 3.2.16 (ii)'den yola çıkarak (2.7) ve (2.8) eşitlikleri $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'de benzer biçimde kanıtlanır. $A' \cap B' \subset A'' \cup B''$ olduğundan $\lambda_n(A' \cap B') \leq \varepsilon/2$ olur. (2.8) ile

$$\begin{aligned} \lambda_n(A' \cup B') &\geq \lambda_n(A') + \lambda_n(B') - \lambda_n(A' \cap B') \\ \lambda_n(A \sqcup B) &\geq \lambda_n(A') + \lambda_n(B') - \varepsilon \geq \lambda_n(A) + \lambda_n(B) - \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.17)$$

(3.17) eşitsizliği her $\varepsilon > 0$ için doğrudur, öyleyse $\lambda_n(A \sqcup B) \geq \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$. ■

Teorem 3.2.18 $\mathcal{L}^n$ bir σ -cebiri ve $\lambda_n : \mathcal{L}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ bir σ -sonlu ölçüdür.

Kanıt. (1) $\emptyset \in \mathcal{L}^n$ ve $\lambda_n(\emptyset) = 0$ aşıkardır. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ açık kümesi $\mathcal{L}^n$ 'dedir. $\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{a \in \mathbb{Z}^n} K[a, 1]$ olduğundan $\mathbb{R}^n \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ve daima $\lambda_n(K[a, 1]) = 1$ olduğundan λ_n σ -sonludur. $A, B \in \mathcal{L}^n$ olsunlar. $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ kümelerinin de $\mathcal{L}^n$ 'de olduğunu kanıtlayalım. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $A', A'', B', B'' \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ kümelerini $A \subset A', A' \setminus A \subset A'', B \subset B', B' \setminus B \subset B''$ ve $\lambda_n(A'') \leq \varepsilon/3, \lambda_n(B'') \leq \varepsilon/3$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} A \cup B &\subset A' \cup B', [(A' \cup B') \setminus (A \cup B)] \subset A'' \cup B'' \\ A \cap B &\subset A' \cap B', [(A' \cap B') \setminus (A \cap B)] \subset A'' \cup B'' \end{aligned}$$

olur. $\lambda_n(A'' \cup B'') \leq \lambda_n(A'') + \lambda_n(B'') \leq \varepsilon$. Dolayısıyla $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{L}^n$ olur. Monoton artan bir $(B'_i) \subset \mathcal{R}$ dizisini $B'_i \uparrow B'$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda her i için

$$\begin{aligned} A \setminus B &\subset (A' \setminus B') \cup B'' \subset (A' \setminus B'_i) \cup B'' \text{ ve} \\ [(A' \setminus B'_i) \cup B''] \setminus (A \setminus B) &\subset A'' \cup B'' \cup (B' \setminus B'_i) \end{aligned}$$

olur. Önerme 3.2.13 (iii)'den dolayı $A' \setminus B'_i, B' \setminus B'_i \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$. Şimdi i 'yi yeterince büyük seçersek $\lambda_n(B' \setminus B'_i) \leq \varepsilon/3$ sağlanır. Böylece elimizde $C', C'' \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ kümeleri $A \setminus B \subset C', C' \setminus (A \setminus B) \subset C''$ ve $\lambda_n(C'') \leq \lambda_n(A'') + \lambda_n(B'') + \lambda_n(B' \setminus B'_i) \leq \varepsilon$ olacak biçimde vardır. Tanımdan $A \setminus B \in \mathcal{L}^n$. Dolayısıyla her $A \in \mathcal{L}^n$ için $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{L}^n$.

(2) Şimdi $\mathcal{L}^n$ 'de ayrık $A_1, A_2, \dots$ kümeleri verilsin. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Her $i \in \mathbb{N}$ için $A'_i, A''_i \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ kümelerini $A_i \subset A'_i$, $A'_i \setminus A_i \subset A''_i$ ve $\lambda_n(A''_i) \leq \varepsilon 2^{-i}$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda $\bigsqcup_{i \geq 1} A_i \subset \bigcup_{i \geq 1} A'_i$ ve

$$\left(\bigcup_{i \geq 1} A'_i \right) \setminus \left(\bigsqcup_{i \geq 1} A_i \right) \subset \bigcup_{i \geq 1} (A'_i \setminus A_i) \subset \bigcup_{i \geq 1} A''_i.$$

Diğer yandan $\bigcup_{i \geq 1} A'_i$ ve $\bigcup_{i \geq 1} A''_i$ kümeleri $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'dedir. Teorem 3.2.11 (iv)'ten dolayı $\lambda_n(\bigcup_{i \geq 1} A''_i) \leq \sum_{i \geq 1} \lambda_n(A''_i) \leq \sum_{i \geq 1} \varepsilon 2^{-i} = \varepsilon$. Dolayısıyla $\bigsqcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{L}^n$. Önsav 3.2.16'dan dolayı $\lambda_n(A'_i) \leq \lambda_n(A_i) + \varepsilon 2^{-i}$, dolayısıyla Teorem 3.2.11 (iv) ile

$$\begin{aligned} \lambda_n \left(\bigsqcup_{i \geq 1} A_i \right) &\leq \lambda_n \left(\bigcup_{i \geq 1} A'_i \right) \leq \sum_{i \geq 1} \lambda_n(A'_i) \\ &\leq \sum_{i \geq 1} (\lambda_n(A_i) + \varepsilon 2^{-i}) \leq \sum_{i \geq 1} \lambda_n(A_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan $\lambda_n \left(\bigsqcup_{i \geq 1} A_i \right) \leq \sum_{i \geq 1} \lambda_n(A_i)$ olur. Bu eşitsizliğin ters yönünü kanıtlarsak işimiz biter. Önsav 3.2.17'den tümevarımla her k için $\sum_{i=1}^k \lambda_n(A_i) \leq \lambda_n \left(\bigsqcup_{i=1}^k A_i \right) \leq \lambda_n \left(\bigsqcup_{i \geq 1} A_i \right)$ olur; buradaki son eşitsizlik $\bar{\lambda}_n$ 'nin monotonluğundan çıkar. $k \rightarrow +\infty$ limiti alınarak $\sum_{i \geq 1} \lambda_n(A_i) \leq \lambda_n \left(\bigsqcup_{i \geq 1} A_i \right)$ elde edilir. ■

Gücü $\mathfrak{c}$ olan bir sıfır kümemiz varsa, bunun her altkümesi Lebesgue ölçülebilir olduğundan $\mathfrak{h}\mathcal{L}^n = 2^{\mathfrak{c}}$ olur. $n \geq 2$ için $\mathbb{R}^n$ 'deki her H hiperdüzlemi bir sıfır kümesidir ve $\mathfrak{h}H = \mathfrak{c}$. $\mathbb{R}$ 'de ise C Cantor kümesi gücü $\mathfrak{c}$ olan bir sıfır kümesidir. Şimdi sorumuz şudur: Her $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue ölçülebilir mi? $\mathbb{R}$ 'de bile Lebesgue ölçülemeyen bir kümeyi Seçme Aksiyomu kullanılmadan veremiyoruz; bu ise pratikte karşılaştığımız tüm kümelerin Lebesgue ölçülebilir olduğu anlamına gelir.

Örnek. $I := [0, 1]$ 'de bir $\sim$ denklik bağıntısı $\forall x, y \in I (x \sim y : \iff x - y \in \mathbb{Q})$ olarak açıklansın. Her denklik sınıfından bir öge seçerek (Seçme Aksiyomu) bir $E \subset \mathbb{R}$ altkümelerini oluşturalım. Dolayısıyla $\forall y \in I \exists! x \in E (x \sim y)$. Şimdi $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ 'yu, $i \neq j$ için $q_i \neq q_j$ olacak biçimde, $q_0, q_1, q_2, \dots$ olarak sıralayalım. $i \neq j$ ise $(q_i + E) \cap (q_j + E) = \emptyset$ olur; aksi durumda $x_i, x_j \in E$ sayıları $q_i + x_i = q_j + x_j$ olacak biçimde bulunur. Buradan $x_j - x_i = q_i - q_j \in \mathbb{Q}$, dolayısıyla $x_i = x_j$ ve $q_i = q_j$ çelişmesine ulaşılır. Aşağıdaki bağıntının sağ yanı apaçıktır.

$$[0, 1] \subset \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (q_i + E) \subset [-1, 2]$$

Her $y \in I$ için bir $x \in E$, $y - z =: q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ olacak biçimde bulunabilir; bu sol yanı verir.

E Lebesgue ölçülebilir olsaydı yukarıdaki bağıntıdan, her i için $0 \leq p := \lambda_1(E) = \lambda_1(q_i + E)$ olduğunu(bunu Teorem 3.2.22'de öğreneceğiz) da gözetirsek

$$1 \leq \lambda_1 \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (q_i + E) \right) = \sum_i p \leq 3$$

olur. Bu bir çelişkidir, E Lebesgue ölçülemez!

Teorem 3.2.19 $A \subset \mathbb{R}^n$ için aşağıdaki önermeler denktirler.

(i) $A \in \mathcal{L}^n$ ve $\lambda_n(A) < +\infty$.

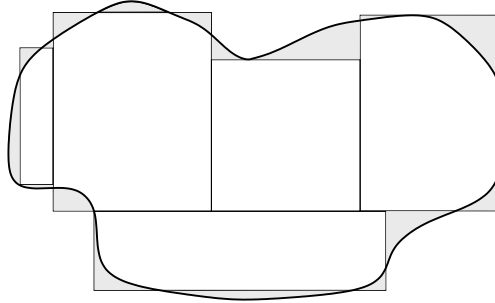
(ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $A_\varepsilon \in \mathcal{F}^n$ figürü ile $\bar{\lambda}_n(A \Delta A_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Kanıt. (i) $\implies$ (ii): $A \in \mathcal{L}^n$ ve $\lambda_n(A) < +\infty$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Tanımdan bir $A' \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ile $A \subset A'$ ve $\bar{\lambda}_n(A' \setminus A) \leq \varepsilon/2$. Bu A' 'ye karşılık bir $A_\varepsilon \in \mathcal{F}^n$ figürü $\lambda_n(A' \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon/2$ olacak biçimde vardır.

$$A \Delta A_\varepsilon = (A \setminus A_\varepsilon) \cup (A_\varepsilon \setminus A) \subset (A' \setminus A_\varepsilon) \cup (A_\varepsilon \setminus A)$$

olduğundan $\lambda_n(A \Delta A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ olur.

(ii) $\implies$ (i): Bir $A_\varepsilon \in \mathcal{F}^n$ ile $\bar{\lambda}_n(A \Delta A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ olsun. Tanım gereği bir $A'' \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$, $A \Delta A_\varepsilon \subset A''$ ve $\lambda_n(A'') \leq \varepsilon/2$ olacak biçimde bulunabilir. $A' := A_\varepsilon \cup A''$ alırsak, bu A', A'' 'ler ile Tanım 3.2.15'in koşulları sağlanır. Dolayısıyla $A \in \mathcal{L}^n$ ve $\lambda_n(A_\varepsilon) < +\infty$ olduğundan $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(A') \leq \lambda_n(A_\varepsilon) + \varepsilon/2 < +\infty$. ■



Şekil 3.1: Sınırlı Lebesgue ölçülebilir kümelerle figürlerle yaklaşma.

Not. Teorem 3.2.19 (ii), ölçü tanımına bir başka yaklaşımın kaynağıdır. Günlük yaşamda bize düzlemde A, B gibi iki levha verilsin. Bunları uygun biçimde üst üste koyduğumuzda çakışmadıkları kısım, yani $A \Delta B$, yeterince küçükse bu iki levhanın alanları aynıdır denir. Bu yaklaşım sağlam bir matematiksel tanıma dönüştürülebilir.

$\bar{\mu} : \mathfrak{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ bir dış ölçü olsun. $A, B \subset X$ için

$$d(A, B) := \bar{\mu}(A \Delta B) \quad (3.18)$$

olarak açıklanan $d : \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ bir pseudoyarımetriktir: Bu her $A, B, C \in \mathfrak{P}(X)$ için (i) $d(A, A) = 0$, (ii) $d(A, B) = d(B, A)$ ve (iii) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ olması demektir. Metrikten farkı $A \neq B$ iken $d(A, B) = +\infty$ veya $d(A, B) = 0$ olabilir.

Şimdi $\mathcal{R} \subset \mathfrak{P}(X)$ bir halka, $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$ bir *sonlu* önölçü ve $\bar{\mu} : \mathfrak{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ ise μ 'ye ilişkin dış ölçü olsun. $A \subset X$ verilsin. d , (3.18) ile tanımlanan pseudoyarımetrik olmak üzere bir $(B_k) \subset \mathfrak{P}(X)$ dizisi $\lim_k d(A, B_k) = 0$ olacak biçimde bulunabiliyorsa A kümesine **$\mathcal{R}$ -yaklaşılabilir** diyelim. $\mathcal{R}$ -yaklaşılabilir kümelerin $\tilde{\mathcal{R}}$ ailesi bir σ -cebiridir ve $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^\uparrow \subset \sigma(\mathcal{R}) \subset \tilde{\mathcal{R}}$ bağıntıları geçerlidir ve $\tilde{\mu} := \bar{\mu}|_{\tilde{\mathcal{R}}}$ bir ölçüdür. Eğer μ , σ -sonlu ise buradan ilerlenir. Ayrıntılar için okur [16]'ya bakabilir. $\blacktriangle$

Önerme 3.2.20 (i) λ_n alttan süreklidir, $dd(A_k) \subset \mathcal{L}^n$ ve $A_k \uparrow A$ ise $A \in \mathcal{L}^n$ ve $\lambda_n(A_k) \nearrow \lambda_n(A)$.
(ii) λ_n üstten süreklidir, $dd \lambda_n(A_1) < +\infty$, $(A_k) \subset \mathcal{L}^n$ ve $A_k \downarrow A$ ise $A \in \mathcal{L}^n$ ve $\lambda_n(A_k) \searrow \lambda_n(A)$.

Kanıt. Teorem 3.2.11'in kanıtının aynısı. $\blacksquare$

Lemma 3.2.21 $\bar{\lambda}_n(A) = 0$ ise A kümesi Lebesgue ölçülebilir, $dd A \in \mathcal{L}^n$.

Kanıt. $\bar{\lambda}_n(A) = 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Bir $B \in \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ile $A \subset B$ ve $\lambda_n(B) \leq \varepsilon$. Dolayısıyla $A' = A'' := B$ alırsak $A \subset A'$, $A' \setminus A \subset A''$ ve $\lambda_n(A'') \leq \varepsilon$ sağlanır. Dolayısıyla $A \in \mathcal{L}^n$. $\blacksquare$

$S \subset \mathbb{R}^n$ bir sıfır kümesi ve $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue ölçülebilir bir küme ise $A \cup S$ ve $A \setminus S$ de Lebesgue ölçülebilir ve $\lambda_n(A) = \lambda_n(A \setminus S) = \lambda_n(A \cup S)$. Diğer yandan $\bar{\lambda}_n(A) = 0$ olması, her $\varepsilon > 0$ için sayılabilir çoklukta $Q_i, i \in I$ kutularının $A \subset \bigcup_{i \in I} Q_i$ ve $\sum_{i \in I} v_n(Q) \leq \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmesi demektir. Bu tür kümelerle kısım 2.4'te **sıfır kümeleri** demiştik. Orada söylenenler burada da geçerlidir. Her sayılabilir veya düşük boyutlu altküme bir sıfır kümesidir. Sayılabilir çoklukta sıfır kümelerinin birleşimi yine bir sıfır kümesidir.

Şimdi $\mathcal{J}^n \subset \mathcal{L}^n$, $\lambda_n|_{\mathcal{J}^n} = j_n$ ve Lebesgue ölçüsünün bir izometrik değişmez olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem 3.2.22 (i) Her sınırlı $A \subset \mathbb{R}^n$ için $j_n(A) \leq \bar{\lambda}_n(A) \leq \bar{j}_n(A)$. Ayrıca A Jordan ölçülebilirse Lebesgue ölçülebilir ve $\lambda_n(A) = j_n(A)$, $dd \mathcal{J}^n \subset \mathcal{L}^n$ ve $\lambda_n|_{\mathcal{J}^n} = j_n$.

(ii) Her $A \subset \mathbb{R}^n$ için $\bar{\lambda}_n(A)$ bir izometrik değişmezdir, dolayısıyla her $A \in \mathcal{L}^n$ için $\lambda_n(A)$ bir izometrik değişmezdir.

Kanıt. (i) $A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı olsun. $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}^{n\uparrow}$ ve $\lambda_n|_{\mathcal{F}^n} = v_n$ olduğundan

$$\bar{\lambda}_n(A) = \inf \left\{ \lambda_n(F) \mid A \subset F \in \mathcal{F}^{n\uparrow} \right\} \leq \inf \left\{ \lambda_n(F) \mid A \subset F \in \mathcal{F}^n \right\} = \bar{j}_n(A).$$

Şimdi önce sonlu sayıda kapalı kutuların birleşimi olan $K \in \mathcal{F}^n$ figürleri için $v_n(K) \leq \bar{\lambda}_n(K)$ olduğunu göstereceğiz. K böyle bir figür olsun ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\varepsilon_i > 0$ sayılarını $\varepsilon = \sum_{i \geq 1} \varepsilon_i$ olacak biçimde seçelim. Dış ölçünün tanımı gereği $Q_1, Q_2, \dots$ kutularını $K \subset \bigcup_{i \geq 1} Q_i$ ve $\sum_{i \geq 1} v_n(Q_i) < \bar{\lambda}_n(K) + \varepsilon$ olacak biçimde seçebiliriz. Her bir i için Q_i 'yi içeren bir açık P_i kutusunu $v_n(P_i) \leq v_n(Q_i) + \varepsilon_i$ olacak biçimde seçebiliriz. K kompakt ve $\{P_i\}$ ise K 'nin bir açık örtüsü olduğundan bir k ile $K \subset \bigcup_{i=1}^k P_i$, dolayısıyla

$$v_n(K) \leq \sum_{i=1}^k v_n(P_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} (v_n(Q_i) + \varepsilon_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} v_n(Q_i) + \varepsilon \leq \bar{\lambda}_n(K) + 2\varepsilon.$$

Bu eşitsizlik her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan $v_n(K) \leq \bar{\lambda}_n(K)$ olur. Şimdi $A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir sınırlı altküme olsun. Her kompakt $K \subset A$ figürü için, $\bar{\lambda}_n$ 'nin monotonluğunu da gözetirsek, $v_n(K) \leq \bar{\lambda}_n(K) \leq \bar{\lambda}_n(A)$ olur. Bu tip K 'ler üzerinden supremum alırsak $\bar{j}_n(A) \leq \bar{\lambda}_n(A)$ olur.

Şimdi A Jordan ölçülebilir olsun. Önsav 3.2.14 (ii) sağlanır; $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}^\uparrow$ olduğundan A Lebesgue ölçülebilir ve $j_n(A) = \underline{j}_n(A) \leq \bar{\lambda}_n(A) \leq \bar{j}_n(A) = j_n(A)$ 'dan $j_n(A) = \bar{\lambda}_n(A) = \lambda_n(A)$ elde edilir.

(ii) Ötelemeler kutuları ölçüleri aynı olan kutulara gönderdiğinden, ötelemeler altında dış ölçü değişmez. Şimdi $M \in GL(\mathbb{R}, n)$ bir ortogonal matris olsun. M 'nin tanımladığı dönüşümü yine M ile gösterelim. $A \subset \mathbb{R}^n$ keyfi verilsin. Sayılabilir çoklukta $Q_i, i \in I$ kutularıyla $A \subset \bigcup_{i \in I} Q_i$ olsun. Sonuç 2.2.25'ten dolayı her i için $M(Q_i)$ Jordan ölçülebilir ve $j_n(M(Q_i)) = j_n(Q_i)$. Buradan (i), $\bar{\lambda}$ 'nin monotonluğu ve alttoplamsallığı ile

$$\bar{\lambda}_n(M(A)) \leq \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_n(M(Q_i)) = \sum_{i \in I} j_n(M(Q_i)) = \sum_{i \in I} j_n(Q_i) = \sum_{i \in I} v_n(Q_i).$$

Buradan $\bar{\lambda}_n(M(A)) \leq \bar{\lambda}_n(A)$ elde edilir. Aynı şey M^T için de geçerlidir. Ayrıca $M^T M = Id$ olduğunu gözetirsek $\bar{\lambda}_n(A) = \bar{\lambda}_n(M^T M(A)) \leq \bar{\lambda}_n(M(A))$. Bu ve bir önceki eşitsizlikten $\bar{\lambda}_n(M(A)) = \bar{\lambda}_n(A)$ elde edilir. ■

$\mathcal{B}^n \subset \mathcal{L}^n$ olduğundan tüm açık ve kapalı kümeler Lebesgue ölçülebilir. Her K kompakt kümesi bir kapalı Q kutusuna düştüğünden ayrıca $\lambda_n(K) < +\infty$ olur. Diğer yandan $\mathbb{R}^n$ 'deki her hiperdüzlem bir sıfır kümesidir. Bunu

kanıtlamak için $\mathbb{R}^n$ 'deki $H := \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ hiperdüzleminin bir sıfır kümesi olduğunu kanıtlamak yeterlidir; çünkü tüm diğer hiperdüzlemler H 'ye izometriktir. $Q_i \in \mathcal{Q}^{n-1}$ ayrık kutularını $\mathbb{R}^{n-1} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda, $Q'_i := Q_i \times \{0\} \in \mathcal{Q}^n$ olmak üzere $H = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} Q'_i$ ve $\lambda_n(Q'_i) = v_n(Q'_i) = 0$ olduğundan $\lambda_n(H) = \sum_i \lambda_n(Q'_i) = 0$ olur.

Önerme 3.2.23 (Yaklaşımlar) Her $A \subset \mathbb{R}^n$ için

(i) $\bar{\lambda}_n(A) = \inf \{\lambda_n(U) \mid A \subset U, U \text{ açık}\},$

(ii) $A \in \mathcal{L}^n$ ise $\lambda_n(A) = \sup \{\lambda_n(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt}\}.$

Kanıt. (i) Eşitliğin sağına geçici olarak $\lambda_n^*(A)$ diyelim. Açık kümeler $\mathcal{F}^{n\uparrow}$ 'de olduğundan $\bar{\lambda}_n(A) \leq \lambda_n^*(A)$ apaçıktır. Ters yön için $\bar{\lambda}_n(A) < +\infty$ varsayabiliriz. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Tanımdan sayılabilir $Q_i, i \in I$ kutularını $A \subset \bigcup_{i \in I} Q_i$ ve

$$\sum_{i \in I} \lambda_n(Q_i) < \bar{\lambda}_n(A) + \varepsilon$$

olacak biçimde seçebiliriz. Q_i kutularını açık varsayabiliriz. Bu durumda $U := \bigcup_{i \in I} Q_i$ bir açık küme ve $A \subset U$. Buradan, $\bar{\lambda}_n$ monoton ve alttoplamsal olduğundan

$$\lambda_n(U) = \bar{\lambda}_n(U) \leq \sum_{i \in I} \lambda_n(Q_i) < \bar{\lambda}_n(A) + \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $\lambda_n^*(A) \leq \bar{\lambda}_n(A)$ ve ilk eşitsizlikle $\lambda_n^*(A) = \bar{\lambda}_n(A)$.

(ii) $A \in \mathcal{L}^n$ olsun. $\lambda_n(A) \geq \sup \{\lambda_n(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt}\}$ olduğu apaçıktır.

Ters yön için önce A 'nın sınırlı olduğunu varsayalım. Bir K_0 kompakt kümesini $A \subset K_0$ olacak biçimde seçelim. $A, K_0 \in \mathcal{L}^n$ olduğundan $K_0 \setminus A \in \mathcal{L}^n$ ve $\lambda_n(K_0 \setminus A) = \lambda_n(K_0) - \lambda_n(A)$. Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. (i)'den, bir $U \supset K_0 \setminus A$ açık kümesini

$$\lambda_n(U) < \lambda_n(K_0 \setminus A) + \varepsilon = \lambda_n(K_0) - \lambda_n(A) + \varepsilon \quad (3.19)$$

olacak biçimde seçebiliriz. Şimdi $K := K_0 \setminus U \subset K_0 \setminus (K_0 \setminus A) = A$ olmak üzere K kompakt, K ve U Lebesgue ölçülebilir olduğundan (3.19) ile

$$\lambda_n(K) = \lambda_n(K_0) - \lambda_n(U) > \lambda_n(A) - \varepsilon.$$

Buradan, $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan, $\lambda_n(A) \leq \sup \{\lambda_n(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt}\}$ elde edilir. Bu, ilk eşitsizlikte birlikte

$$\lambda_n(A) = \sup \{\lambda_n(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt}\}$$

eşitliğini verir. Savımız sınırlı $A \in \mathcal{L}^n$ kümeleri için kanıtlanmıştır.

Şimdi $A \in \mathcal{L}^n$ keyfi verilsin. Her $k \in \mathbb{N}^*$ için $A_k := A \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq k\}$ olsun. $A_k \in \mathcal{L}^n$ sınırlı ve $A_k \uparrow A$. Az önce kanıtlanandan

$$\begin{aligned}\lambda_n(A_k) &= \sup \{ \lambda_n(K) \mid K \subset A_k, K \text{ kompakt} \} \\ &\leq \sup \{ \lambda_n(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt} \}.\end{aligned}$$

Buradan Teorem 3.2.6 (iii) ile

$$\lambda_n(A) = \lim \lambda_n(A_k) \leq \sup \{ \lambda_n(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt} \}.$$

Böylece ters eşitsizlik her A için kanıtlanmıştır. ■

Not. Önerme 3.2.23 bize herhangi bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin $\lambda_n(A)$ iç ölçüsünün tanımı için bir başka seçenek sunar. Açık-kapalı, dış-iç ve inf-sup ikili kavramlardır ve önermemizin doğal sonucu

$$\underline{\lambda}_n(A) := \sup \{ \lambda_n(K) \mid K \subset A, K \text{ kapalı} \}$$

iç ölçü tanımıdır. Bu tanımdan yola çıkarsak $A \in \mathcal{L}^n \iff \bar{\lambda}_n(A) = \underline{\lambda}_n(A)$ olur. ▲

$B \in \mathcal{B}^n$ ve $S \subset \mathbb{R}^n$ bir sıfır kümesi olsun. B ve S 'nin her ikisi de Lebesgue ölçülebilir olduğundan $B \setminus S$ ve $B \cup S$ kümeleri de Lebesgue ölçülebilir. Tersine her $A \in \mathcal{L}^n$ Lebesgue ölçülebilir kümesini bir B Borel kümesi ve uygun S, S' sıfır kümeleri ile $B \setminus S$ ve $B \cup S'$ olarak yazabiliriz; bunu aşağıda kanıtlayacağız. Bu nedenle kimi yazar Borel kümeleri ile yetinir.

Önce bir tanım verelim: $\mathbb{R}^n$ 'de sayılabilir çoklukta açık kümenin arakesiti olan kümeler bir **G_δ -kümesi**, sayılabilir çoklukta kapalı kümelerin birleşimi olan kümeler ise bir **F_σ -kümesi** denir.

Teorem 3.2.24 (Düzgünlük Teoremi) $A \in \mathcal{L}^n$ olsun.

- (i) Bir B G_δ -kümesi $A \subset B$ ve $\lambda_n(B \setminus A) = 0$ olacak biçimde vardır⁴.
- (ii) Bir C F_σ -kümesi $C \subset A$ ve $\lambda_n(A \setminus C) = 0$ olacak biçimde vardır.

Kanıt. Her $j \in \mathbb{N}^*$ için $A_j := \{x \in A \mid j-1 \leq \|x\| < j\}$ dersek $A = \bigsqcup_{j \geq 1} A_j$ olur. Önerme 3.2.23'ten dolayı, her $i \in \mathbb{N}^*$ için $U_{i,j}$ açık ve $K_{i,j}$ kompakt kümeleri $K_{i,j} \subset A_j \subset U_{i,j}$ ve

$$\lambda_n(U_{i,j}) < \lambda_n(A_j) + 2^{-j}/i \text{ ve } \lambda_n(K_{i,j}) > \lambda_n(A_j) - 2^{-j}/i$$

⁴Lebesgue ölçülebilir kümeler neredeyse açık kümelerdir; bu Littlewood'un üçüncü ilkesidir.

olacak biçimde seçilebilirler. Bu durumda $U_i := \bigcup_{j \geq 1} U_{i,j}$ açık ve $C_i := \bigcap_{j \geq 1} K_{i,j}$ kapalıdır ($\{A_j\}_{j \geq 1}$ bir ayrık aile olduğundan son birleşim ayrıktır!) ve $C_i \subset A \subset U_i$ geçerlidir. $B = \bigcap_{i \geq 1} U_i$ ve $C := \bigcup_{i \geq 1} C_i$ olsun. $A_j = A \cap (B_j \setminus \overline{B}_{j-1})$ Lebesgue ölçülebilir olduğundan, her $i \in \mathbb{N}^*$ için

$$\lambda_n(B \setminus A) \leq \lambda_n(U_i \setminus A) \leq \sum_{j \geq 1} \lambda_n(U_{i,j} \setminus A_j) \leq \sum_{j \geq 1} (\lambda_n(U_{i,j}) - \lambda_n(A_j)) \leq \frac{1}{i} \text{ ve}$$

$$\lambda_n(A \setminus C) \leq \lambda_n(A \setminus C_i) \leq \sum_{j \geq 1} \lambda_n(A_j \setminus K_{i,j}) \leq \sum_{j \geq 1} (\lambda_n(A_j) - \lambda_n(K_{i,j})) \leq \frac{1}{i}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $i \rightarrow +\infty$ savlarımızı verir. $\blacksquare$

Sonuç 3.2.25 $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. $A \in \mathcal{L}^n$ olması için gvyk bir G_δ -kümesi H 'nin, $A \subset H$ ve $\bar{\lambda}_n(H \setminus A) = 0$ olacak biçimde bulunmasıdır.

Kanıt. Savın bir yönü Teorem 3.2.24 (i)'den çıkar. Şimdi H bir G_δ -kümesi, $A \subset H$ ve $\bar{\lambda}_n(H \setminus A) = 0$ olsun. H ve $H \setminus A$ ölçülebilir olduğundan $A = H \setminus (H \setminus A)$ ölçülebilir. $\blacksquare$

Teorem 3.2.24 özetle her Lebesgue ölçülebilir A kümesinin bir C F_σ -kümesi ve bir B G_δ -kümesi arasına, $C \subset A \subset B$ ve $\lambda_n(B \setminus C) = 0$ olacak biçimde, sıkıştırılabileceğini söyler. Elbette $C, B \in \mathcal{B}^n$. Bu özelliğinden dolayı λ_n ölçüsü **düzgündür** denir.

Teorem 3.2.26 (Çarpım Teoremi) $p, q, n \in \mathbb{N}^*$ ve $n = p + q$ olsun. $A \in \mathcal{L}^p, B \in \mathcal{L}^q$ ise $A \times B \in \mathcal{L}^n$ ve

$$\lambda_n(A \times B) = \lambda_p(A) \cdot \lambda_q(B).$$

Kanıt. Her şeyden önce savımız $A \in \mathcal{Q}^p$ ve $B \in \mathcal{Q}^q$ birer kutu ise doğrudur. Gerçekten de bu durumda $A \times B \in \mathcal{Q}^n$ de bir kutudur ve $\lambda_n(A \times B) = \lambda_p(A) \cdot \lambda_q(B)$.

(1) A veya B bir sıfır kümesi ise $A \times B$ de bir sıfır kümesidir; gösterelim. Gbk A bir sıfır kümesi olsun. $k \in \mathbb{N}^*$ için $Q_k^q := [-k, k] \times \cdots \times [-k, k]$ kutusu için $\lambda_q(Q_k^q) = 2^q k^q > 0$ olur. Önce $A \times Q_k^q$ 'nin bir sıfır kümesi olduğunu görelim. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. A bir sıfır kümesi olduğundan, sayılabilir çoklukta $Q_i^p, i \in I$ kutuları $A \subset \bigcup_{i \in I} Q_i^p$ ve $\sum_{i \in I} \lambda_p(Q_i^p) < \varepsilon / \lambda_p(Q_k^q)$ olacak biçimde seçilebilir. Şimdi $A \times Q_k^q \subset \bigcup_{i \in I} Q_i^p \times Q_k^q$ ve

$$\bar{\lambda}_n(A \times Q_k^q) \leq \sum_{i \in I} \lambda_n(Q_i^p \times Q_k^q) = \sum_{i \in I} \lambda_p(Q_i^p) \cdot \lambda_q(Q_k^q) < \varepsilon$$

olur. Öyleyse $A \times Q_k^q$ bir sıfır kümesi, dolayısıyla $A \times \mathbb{R}^q = \bigcup_k A \times Q_k^q$ bir sıfır kümesidir. Sonuçta $A \times B \subset A \times \mathbb{R}^q$ bir sıfır kümesidir.

(2) A ve B açık kümeler olsun. Bu durumda $A \times B$ de açıktır, dolayısıyla $A \times B \in \mathcal{L}^n$. Sayılabilir çoklukta Q_i^p, Q_j^q kutularıyla $A = \bigsqcup_{i \in I} Q_i^p$ ve $B = \bigsqcup_{j \in J} Q_j^q$. Böylece $A \times B = \bigsqcup_{i,j} Q_i^p \times Q_j^q$ ve

$$\begin{aligned} \lambda_n(A \times B) &= \sum_{i,j} \lambda_n(Q_i^p \times Q_j^q) = \sum_{i,j} \lambda_p(Q_i^p) \lambda_q(Q_j^q) \\ &= \left(\sum_i \lambda_p(Q_i^p) \right) \left(\sum_j \lambda_q(Q_j^q) \right) = \lambda_p(A) \lambda_q(B). \end{aligned}$$

(3) A ve B , sınırlı G_δ -kümeleri olsunlar. Sınırlı ve azalan $U_k \subset \mathbb{R}^p$ ve $V_k \subset \mathbb{R}^q$ açık küme dizilerini $U_k \downarrow A$ ve $V_k \downarrow B$ olacak biçimde seçelim. $U_k \times V_k \subset \mathbb{R}^n$ açık ve $U_k \times V_k \downarrow A \times B$ olduğundan $A \times B$ de bir G_δ -kümesidir; dolayısıyla $A \times B \in \mathcal{L}^n$ ve Önerme 3.2.20 (ii) ve (2) ile

$$\begin{aligned} \lambda_n(A \times B) &= \lim_k \lambda_n(U_k \times V_k) = \lim_k (\lambda_p(U_k) \lambda_q(V_k)) \\ &= \lim_k \lambda_p(U_k) \lim_k \lambda_q(V_k) = \lambda_p(A) \lambda_q(B). \end{aligned}$$

(4) A ve B sınırlı ve Lebesgue ölçülebilir olsunlar. Teorem 3.2.24 (i) ile G ve G' sınırlı G_δ -kümeleri ve S, S' sıfır kümeleri $A \sqcup S = G$ ve $B \sqcup S' = G'$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda $G \times G' = (A \times B) \sqcup (A \times S') \sqcup (S \times B) \sqcup (S \times S')$ olur. (1)'den dolayı $A \times S', S \times B, S \times S'$ kümelerinin her biri $\mathbb{R}^n$ 'de birer sıfır kümesidir; bu nedenle bunların S'' birleşimi de bir sıfır kümesidir. Yine Teorem 3.2.24 (i) ile $A \times B$ Lebesgue ölçülebilir ve (3) ile $\lambda_n(A \times B) = \lambda_n(G \times G') = \lambda_p(G) \lambda_q(G') = \lambda_p(A) \lambda_q(B)$.

(5) A ve B sınırlı olması gerekmeyen ölçülebilir kümeler olsunlar. Her $k, m \in \mathbb{N}^*$ için $Q_k^m := [-k, k] \times \cdots \times [-k, k]$ (m kez çarpım) olmak üzere $A_k := A \cap Q_k^p, B_k := B \cap Q_k^q$ ve $(A \times B)_k := (A \times B) \cap Q_k^n$ olsun. Bu durumda A_k, B_k ve $(A \times B)_k$ kümeleri Lebesgue ölçülebilirler. $A_k \uparrow A, B_k \uparrow B$ ve $(A \times B)_k \uparrow A \times B$ olduğundan Önerme 3.2.20 (i) ve (4) ile, $(A \times B)_k = A_k \times B_k$ olduğunu da gözetirsek,

$$\lambda_n(A \times B) = \lim_k \lambda_n(A_k \times B_k) = \lim_k \lambda_p(A_k) \lambda_q(B_k) = \lambda_p(A) \lambda_q(B).$$

■

3.3 Lebesgue İntegrali

Teorem 2.4.12'de $(f_k) \subset \mathcal{R}(\Omega)$ ve $f_k \xrightarrow{\Omega} f$ ise $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ ve $\int_\Omega f = \lim \int_\Omega f_k$ olduğunu kanıtladık. Düzgün yakınsaklık çok güçlü bir kavramdır. Fonksiyonlarımız $\mathbb{R}$ değerli olsunlar. Bir (f_k) fonksiyon dizisinden, düzgün yakınsaklıktan farklı, istenebilecek koşullardan ikisi düzgün sınırlılık ve monoton

yakınsaklıktır. (f_k) fonksiyon dizimize bir $M \geq 0$ ile her $x \in \Omega$ ve her k için $|f_k(x)| \leq M$ sağlanmışsa **düzgün sınırlıdır** diyelim. $I = [0, 1]$ olsun. Örnek 2.4.11 (2)'de düzgün sınırlı ve aynı zamanda monoton artan bir $(f_k) \subset \mathcal{R}(I)$ fonksiyon dizisi verdik. Bu dizinin limiti olan f bir sınırlı fonksiyondur, ancak $f \notin \mathcal{R}(I)$. Dolayısıyla, ne düzgün sınırlılık, ne de monoton yakınsaklık tek başlarına limit fonksiyonun integrallenebilirliğini garantilemez; örneğimizde gördüğümüz gibi, bu iki koşul bir arada olsalar bile bu böyledir.

Lebesgue yeni bir integral kavramının peşindedir. En doğal ön koşulumuz, yeni integral kavramımız Riemann integrallenebilir fonksiyonları kapsamalı ve bunların integralini korumalıdır. Buna ek olarak Teorem 2.4.12'de düzgün yakınsaklık yerine monoton yakınsaklık alabilmeliyiz. Lebesgue her sınırlı $[a, b]$ aralığı ve her *sınırlı* $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için bir $L \int_a^b f$ integrali açıklamak istiyor (H. Lebesgue, Oevres Scientifiques, Vol.II, s.114). Riemann integrali söz konusu olduğunda biz *önce* f 'nin Riemann integrallenebilir olmasının *tanımını verdik, sonra* $\mathcal{R}([a, b])$ 'nin *özelliklerini araştırdık*. Lebesgue'in **betimleyici**⁵ olarak adlandırdığı yöntemi tam ters yönde çalışır: *Önce açıklayacağı integralin, onu, geçici olarak* $L \int_a^b f \equiv L \int_a^b f(x)dx$ ile gösterelim, *sağlaması gereken asgari özellikleri verir, sonra tanımı belirler*. Lebesgue $L \int_a^b f$ integralinin şu özellikleri olmasını ister: $a, b, c, h \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(i) \quad L \int_a^b f(x)dx = L \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx .$$

$$(ii) \quad L \int_a^b f + L \int_b^c f + L \int_c^a f = 0 .$$

$$(iii) \quad L \int_a^b (f + g) = L \int_a^b f + L \int_a^b g.$$

$$(iv) \quad f \geq 0 \text{ ve } a < b \text{ ise } L \int_a^b f \geq 0.$$

$$(v) \quad L \int_0^1 1 = 1.$$

$$(vi) \quad f_k, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı ve } f_n \nearrow f \text{ ise } \lim L \int_a^b f_k = L \int_a^b f.$$

Riemann integrali (i)-(v) özelliklerini sağlar, ancak (vi) özelliğini sağlamaz. $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonlarsa $L \int_a^b (f + g) = L \int_a^b f + L \int_a^b g$, her $r \in \mathbb{R}$ için $L \int_a^b rf = rL \int_a^b f$, $f \leq g \implies L \int_a^b f \leq L \int_a^b g$, $f \geq 0 \implies L \int_a^b f \geq 0$, $L \int_a^c f = -L \int_c^a f$, $L \int_a^a f = 0$ ve $L \int_a^b 1 = b - a = v_1([a, b])$ olduğu kolayca görülür(bkz. [28], s.56).

$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ ve $m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i])$ ve $M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i])$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \leq L \int_a^b f \leq \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

⁵descriptive

olur ve bu bize

$$\underline{\int_a^b f} \leq L \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f}$$

eşitsizliğini verir. Dolayısıyla f Riemann integrallenebilirse $\int_a^b f = L \int_a^b f$ olur. Bu eşitlik (i)-(v)'i sağlayan her $L \int_a^b$ integrali için geçerlidir. Henüz (vi) özelliğini kullanmadık.

Şimdi $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$ sınırlı fonksiyonu verilsin. $m = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M$ ve $B_i := [y_{i-1}, y_i]$ olmak üzere $[m, M]$ 'nin $\mathcal{Y}_0 = \{B_1, \dots, B_n\}$ parçalanışını alalım. $A_i := f^{-1}([y_{i-1}, y_i])$ dersek $[a, b]$ 'nin $\mathcal{Z}_0 = \{A_1, \dots, A_n\}$ parçalanışını elde ederiz. Bu durumda $\varphi_0 := \sum_{1 \leq i \leq n} y_{i-1} \mathbf{1}_{A_i}$ ve $\Phi_0 := \sum_{1 \leq i \leq n} y_i \mathbf{1}_{A_i}$ fonksiyonları için $[a, b]$ aralığında $\varphi_0 \leq f \leq \Phi_0$ olduğundan

$$L \int_a^b \varphi_0 = \sum_{1 \leq i \leq n} y_{i-1} L \int_a^b \mathbf{1}_{A_i} \leq L \int_a^b f \leq \sum_{1 \leq i \leq n} y_i L \int_a^b \mathbf{1}_{A_i} = L \int_a^b \Phi_0. \quad (3.20)$$

Şimdi $[m, M]$ 'nin bir $(\mathcal{Y}_k)$ parçalanış dizisini $\mathcal{Y}_0 \prec \mathcal{Y}_1 \prec \dots$ ve $\|\mathcal{Y}_k\| \leq \frac{1}{2} \|\mathcal{Y}_{k-1}\|$ olacak biçimde seçelim. φ_0 'ı oluşturduğumuz gibi φ_k 'leri oluşturalım. Açıkça $\varphi_k \nearrow f$. Dolayısıyla $L \int_a^b f = \lim_k L \int_a^b \varphi_k$ olur. Yukarıdaki eşitlikten kolayca görüleceği gibi, herhangi bir sınırlı $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ verildiğinde, $A \subset [a, b]$ altkümeleri için $L \int_a^b \mathbf{1}_A$ integrallerini bilmek $L \int_a^b f$ integralini bilmek için yeterlidir. Özel olarak $A = [c, d] \subset [a, b]$ bir kapalı aralıksa

$$L \int_a^b \mathbf{1}_A = d - c = v_1([c, d]) = v_2([c, d] \times [0, 1]) \quad (3.21)$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla Lebesgue, $L \int$ integralinin belirlenmesini ölçü problemine dönüştürür: Her sınırlı $A \subset \mathbb{R}$ için sayılabilir toplamsal, ötelemelere göre değişmez ve $m([0, 1]) = 1$ koşulunu sağlayan bir $m : \mathfrak{P}_s(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty)$ dönüşümü bulunuz (ölçü problemi). Bu yaklaşımda $m(A)$ 'ya A 'nın uzunluğu der. Bu problemin çözümü yoktur. A kümesinin sınırsız olmasına ve $\lambda_1(A) = +\infty$ olmasına izin vererek Lebesgue $\mathcal{L}^1 \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ σ -cebiri ve $\lambda_1 : \mathcal{L}^1 \rightarrow [0, +\infty]$ ölçüsüne ulaşır. (3.21)'den dolayı $A \in \mathcal{L}^1([a, b])$ için

$$L \int_A \mathbf{1}_A := \lambda_1(A) = \lambda_2(A \times [0, 1]).$$

olarak açıklanır.

“Integralin, Cauchy-Riemann'a göre tanımından benimkine geçmek için değişken aralığının parçalanışından değer aralığının parçalanışına geçmek

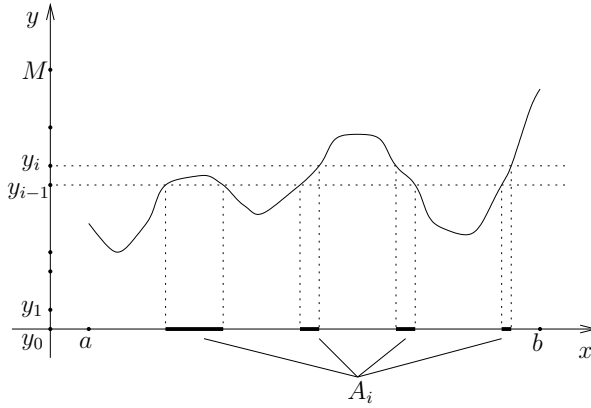
⁶ φ_k 'nin tanımından $[a, b]$ 'de $0 \leq f - \varphi_k \leq \|\mathcal{Y}_k\|$ ve $\lim \|\mathcal{Y}_k\| = 0$ olduğundan ayrıca $\varphi_k \xrightarrow{[a, b]} f$.

yeterlidir (Lebesgue)".⁷Lebesgue'in bu alıntısına açıklık getirmek için bir $f : [a, b] \rightarrow [0, M]$ pozitif sınırlı fonksiyonunu ele alalım. $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M$ olmak üzere $\mathcal{Y} = \{y_0, \dots, y_n\}$ parçalanışı verilsin (bkz. Şekil 3.2). $A_i := f^{-1}([y_{i-1}, y_i])$ olmak üzere, $\varphi_{\mathcal{Y}} := \sum_i y_{i-1} 1_{A_i}$ ve $\Phi_{\mathcal{Y}} := \sum_i y_i 1_{A_i}$ olsun. Her bir A_i Lebesgue ölçülebilir ise

$$A(f, \mathcal{Y}) = \sum_{i=1}^n y_{i-1} \lambda_1(A_i) = L \int_a^b \varphi_{\mathcal{Y}} = \lambda_2([0, \varphi_{\mathcal{Y}}]) \quad \text{Lebesgue alttoplamı ve}$$

$$U(f, \mathcal{Y}) = \sum_{i=1}^n y_i \lambda_1(A_i) = L \int_a^b \Phi_{\mathcal{Y}} = \lambda_2([0, \Phi_{\mathcal{Y}}]) \quad \text{Lebesgue üsttoplamı}$$

oluşturulabilir.



Şekil 3.2: Lebesgue yaklaşımının görselleştirilmesi.

x -ekseni ile f 'nin grafi arasında kalan $[0, f)$ kümesinin alanına $A(f, \mathcal{Y})$ ile içeriden, $U(f, \mathcal{Y})$ ile dışarıdan yaklaşılr. Lebesgue, $[0, M]$ 'in her $\mathcal{Y}$ parçalanışı için A_i 'ler Lebesgue ölçülebilirse, f fonksiyonu *ölçülebilir* der. Bunun olması için gerek ve yeter koşul her $0 \leq l \leq L \leq M$ için $f^{-1}([l, L])$ 'nin Lebesgue ölçülebilir olmasıdır. f ölçülebilir ve $\|\mathcal{Y}\| < \varepsilon$ ise $U(f, \mathcal{Y}) - A(f, \mathcal{Y}) < \varepsilon(b - a)$ olur. $(\mathcal{Y}_k)$ parçalanış dizisi için $\|\mathcal{Y}_k\| \rightarrow 0$ ise, $(\mathcal{Y}_k)$ dizisinin seçiminden bağımsız olarak $(A(f, \mathcal{Y}_k))$ ve $(U(f, \mathcal{Y}_k))$ dizilerinin aynı sayıya yakınsadığı kolayca görülür; bu sayı f 'nin $[a, b]$ aralığındaki Lebesgue integralidir. Demek ki, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonları söz konusu olduğunda $L \int_a^b f$ Lebesgue integraline Riemann integraline benzer biçimde yaklaşabiliriz. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırsız olduğunda Φ_k 'ler oluşturulamaz ve yalnızca

⁷Kelimenin altını biz çizdik.

φ_k 'lerle çalışmak zorunda kalırız. Bu durumda ise $\varphi_k \nearrow f$ olmak üzere

$$L \int_a^b f = \lim L \int_a^b \varphi_k = \lim \lambda_2([0, \varphi_k]) = \lambda_2([0, f]). \quad (3.22)$$

Biz Lebesgue'in anlatımına sadık kalarak, irdelemeleri bir $[a, b]$ kapalı aralığındaki sınırlı f fonksiyonları için yaptık. Elbette bir $Q \subset \mathbb{R}^n$ kapalı kutusundaki sınırlı fonksiyonlar için bu irdelemeler aynen geçerlidir, ve bu kez integrali $L \int_Q f$ ile gösterirsek (3.22) eşitliği

$$L \int_Q f = \lim L \int_Q \varphi_k = \lim \lambda_{n+1}([0, \varphi_k]) = \lambda_{n+1}([0, f]) \quad (3.23)$$

şeklini alır.

Çoğu analiz kitabında karşılaşacağımız yukarıdaki kısa anlatım Lebesgue yaklaşımını yansıtır; sanki Lebesgue her şeyi tersyüz etmiş ve tüm keramet bundaymış izlenimi yaratılır. İşin kötüsü, Riemann yaklaşımıyla olan benzerliklerin üstü örtülü kalır. Yukarıdaki anlatımdaki $A_1, \dots, A_n$ kümeleri $[a, b]$ kapalı aralığının Lebesgue ölçülebilir kümelerle bir parçalanışdır. $\|\mathcal{Y}\| < \varepsilon$ olması ise f 'nin A_i 'lerdeki salınımlarının $\leq \varepsilon$ olması demektir. Standart yaklaşımda, integral tanımından önce gelen ölçülebilir fonksiyonların oynadığı rol, A 'nın Lebesgue ölçülebilir sayılabilir parçalanışlarından, f 'ye uygun bazılarını, $\text{sl}(f, A_i) \leq \varepsilon$ olanları, elde etmektir. Lebesgue'in söylediği, $\mathcal{Y}$ parçalanışlarından yola çıkmanın bir *zorunluluk değil yeterli olduğudur*. Eğer f fonksiyonumuz değerlerini bir V Banach uzayında alıyorsa ortada $\mathcal{Y}$ parçalanışı kalmaz! Biz ise doğrudan A 'nın tüm sayılabilir parçalanışlarından yola çıkacağız.

Biz Lebesgue integralini üç yaklaşımla tanımlayacağız: Ölçüsel, Darboux tipi ve Riemann tipi yaklaşımlar. Bunlardan ölçüsel ve Darboux tipi yaklaşımlar yalnızca $\mathbb{R}$ -değerli fonksiyonlar için anlamlıdır. Buna karşın Riemann tipi yaklaşım vektör değerli fonksiyonlar için de anlamlıdır.

3.3.1 Ölçüsel Yaklaşım

Uzlaşma: Bu altkısımda $A \subset \mathbb{R}^n$ daima bir Lebesgue ölçülebilir kümeyi gösterecek ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olacaktır. A 'nın veya f 'nin sınırlı olması gerekmez!

$g, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g \leq f$ ise daha önce $[g, f]$, $[g, f]$, (g, f) ve $(g, f]$ kümelerini tanımladık. Elbette bunlar $\mathbb{R}^{n+1}$ 'nin altkümeleridirler. Eğer $g \equiv a$ ise bu kümeleri $[a, f]$, ve $[a, f]$ ile göstereceğiz; $f = a$ için benzer gösterimler kullanılır.

$$(-\infty, f) := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} | y < f(x)\}$$

kümesine f 'nin **tam grafaltı** diyelim. Aşağıdaki tanımın temeli (3.23) eşitliğidir.

Tanım 3.3.1 $f : A \rightarrow [0, +\infty)$ olsun. $[0, f)$ Lebesgue ölçülebilirse, kısaca $[0, f) \in \mathcal{L}^{n+1}$ ise f fonksiyonu λ -**ölçülebilir** diyelim. Bir $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna ise g^+ ve g^- fonksiyonlarının her ikisi de λ -ölçülebilirse, λ -**ölçülebilir** diyelim.

(i) $f : A \rightarrow [0, +\infty)$ λ -ölçülebilirse

$$\int_A f d\lambda_n := \lambda_{n+1}([0, f)) \quad (3.24)$$

değerine f 'nin **Lebesgue integrali** denir. $\int_A f d\lambda_n = +\infty$ olabilir.

(ii) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. f^+ ve f^- 'nin her ikisi de λ -ölçülebilir, ancak $\int_A f^+ d\lambda_n$ ve $\int_A f^- d\lambda_n$ 'nin ikisi birden $+\infty$ değilse

$$\int_A f d\lambda_n := \lambda_{n+1}([0, f^+)) - \lambda_{n+1}([0, f^-)) = \int_A f^+ d\lambda_n - \int_A f^- d\lambda_n \quad (3.25)$$

değerine f 'nin λ_n -ye göre **Lebesgue integrali** denir.

(iii) f , λ -ölçülebilir, $\int_A f^+ d\lambda_n$ ve $\int_A f^- d\lambda_n$ 'nin her ikisi de sonlu ise f fonksiyonu (λ_n 'ye göre) **Lebesgue integrallenebilir** denir. A 'daki Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların kümesini $\mathcal{L}(A)$ ile göstereceğiz.

Bu tanıma göre bazı f fonksiyonlarının λ_n 'ye göre Lebesgue integralleri varken, kendileri λ_n 'ye göre Lebesgue integrallenebilir olmayabilirler; bu örneğin $\int_A f d\lambda_n = \pm\infty$ için söz konusudur. Bu söylem öylesine yerleşmiş ki değiştirmeyi göze alamadık. Örneğin $A = [0, +\infty)$ ve $f \equiv 1$ ise $[0, f) = A \times [0, 1)$ kutusu Lebesgue ölçülebilir, dolayısıyla $\int_A f = \lambda_2([0, f)) = +\infty$, ancak f Lebesgue integrallenemez! Eğer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \geq 0$ için 1, $x < 0$ için -1 değerini alıyorsa $\lambda_2([0, f^+)) = +\infty$ ve $\lambda_2([0, f^-)) = +\infty$ olduğundan $\int f d\lambda_1$ tanımsızdır, dolayısıyla integrallenemez!

Sonuç 3.3.2 $f \in \mathcal{R}(A)$ ise $f \in \mathcal{L}(A)$ ve $\int_A f dj_n = \int_A f d\lambda_n$.

Kanıt. Teorem 3.2.22 (i). ■

Tanım 3.3.1 yalnızca ölçüye dayanır ve görsel bir destek de sunar; bu anlamda güçlü bir tanımdır. Ancak bize verilen integrallenebilir bir fonksiyonun integralinin nasıl hesaplanacağı hakkında fazla bilgi vermez. İlk işimiz hangi f fonksiyonları için $[0, f^+)$ ve $[0, f^-)$ kümelerinin her ikisinin de Lebesgue ölçülebilir olduğunu belirlemek olacaktır.

Uzlaşma: $A = \mathbb{R}^n$ ise $\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n$ yerine kısaca $\int f d\lambda_n$ yazacağız. Yanlış anlaşılma endişesi yoksa $\int_A f d\lambda_n$ ve $\int f d\lambda_n$ yerine yalın olarak $\int_A f$ ve $\int f$

yazacağız. Tanım 3.3.1'den de görüleceği gibi $f \geq 0$ tipinde fonksiyonlara odaklanmak yeterlidir. Ayrıca belirtmedikçe fonksiyonlarımız bu tipten olacaktır.

Teorem 3.3.3 (Lebesgue Monoton Yakınsaklık Teoremi) Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ λ -ölçülebilir ve $f_k \uparrow f$ ise f de λ -ölçülebilir ve $\int_A f_k \uparrow \int_A f$.

Kanıt. $[0, f_k]$ ölçülebilir ve $[0, f_k] \uparrow [0, f]$ olduğundan $[0, f]$ de ölçülebilir. Ölçümümüz alttan sürekli olduğundan $\lambda_{n+1}([0, f_k]) \uparrow \lambda_{n+1}([0, f])$. ■

Önerme 3.3.4 $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ λ -ölçülebilir fonksiyonlarsa aşağıdaki önermeler geçerlidir:

- (i) $f \leq g$ ise $\int_A f \leq \int_A g$.
- (ii) I sayılabilir olmak üzere $\{A_i\}_{i \in I}$, A 'nın Lebesgue ölçülebilir kümelere bir parçalanışı ise

$$\int_A f = \sum_{i \in I} \int_{A_i} f.$$

- (iii) $\int_A \mathbf{1}_A = \lambda_n(A)$.
- (iv) A bir sıfır kümesi ise $\int_A f = 0$.
- (v) Hemen her yerde $f = g \implies \int_A f = \int_A g$.
- (vi) $0 \leq p \in \mathbb{R}$ ise $\int_A pf = p \int_A f$.
- (vii) $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$.

Kanıt. Tüm bu önermelerin algımızda geometrik karşılığı vardır.

(i) $f \leq g \implies [0, f] \subset [0, g] \implies \lambda_{n+1}([0, f]) \leq \lambda_{n+1}([0, g]) \implies \int_A f \leq \int_A g$.

(ii) $f_i := f|_{A_i}$ dersek her şeyden önce $[0, f_i] = [0, f] \cap (A_i \times \mathbb{R})$ olduğundan f_i Lebesgue ölçülebilir. $[0, f] = \bigsqcup_{i \in I} [0, f_i]$ olduğundan sav λ_{n+1} 'in toplamsallığından çıkar.

(iii) $\int_A \mathbf{1}_A = \lambda_{n+1}([0, \mathbf{1}_A]) = \lambda_{n+1}(A \times [0, 1]) = \lambda_n(A) \lambda_1([0, 1]) = \lambda_n(A)$.

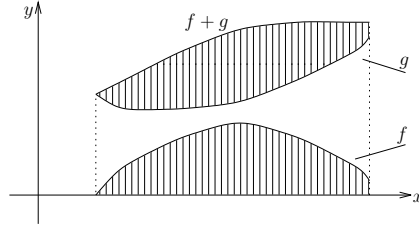
(iv) $[0, f] \subset A \times \mathbb{R}$ ve $A \times \mathbb{R}$ bir sıfır kümesidir. Bu savı verir.

(v) $S \subset A$ bir sıfır kümesi ve her $x \in A \setminus S$ için $f(x) = g(x)$ olsun. (ii) ve (iv) ile

$$\int_A f = \int_{A \setminus S} f + \int_S f = \int_{A \setminus S} f = \int_{A \setminus S} g = \int_{A \setminus S} g + \int_S g = \int_A g.$$

(vi) $T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dönüşümü $T(x, x_{n+1}) = (x, px_{n+1})$ olsun. $Q \in \mathcal{Q}^n$ ve $a_{n+1} \geq 0$ olmak üzere, T dönüşümü $Q' = Q \times [0, a_{n+1})$ kutusunu $Q'' =$

$Q \times [0, pa_{n+1})$ kutusuna resmeder. $\lambda_{n+1}(Q'') = pa_{n+1}\lambda_n(Q) = p\lambda_{n+1}(Q')$. Dolayısıyla buradan $\lambda_{n+1}([0, pf)) = p\lambda_{n+1}([0, f))$ elde ederiz. Bu, savı verir.



Şekil 3.3: Önerme 3.3.4(vii)'ye görsel destek.

(vii) Görsel olarak aşıkâr olan bu savın kanıtını vermeyeceğiz. İlgili okur [31], s.378'e bakabilir. Bu sav Riemann yaklaşımında, yakınsak iki toplamın toplamlarının da yakınsak ve toplamın limitinin limitlerin toplamına eşit olması anlamına gelecektir. ■

Önerme 3.3.5 $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ olsun. $[0, f)$ 'nin ölçülebilir olması $[0, f]$ 'nin ölçülebilir olmasına denktir ve bunlardan birisinin ölçülebilir olması durumunda $\lambda_{n+1}([0, f)) = \lambda_{n+1}([0, f])$. Dolayısıyla f λ -ölçülebilirse G_f grafi bir sıfır kümesidir.

Kanıt. (1) $[0, f)$ ölçülebilir olsun. Her $k \in \mathbb{N}^*$ için $f_k := (1 + 1/k)f$ olsun. Bu durumda bir $S \subset A \times \{0\}$ kümesi ile

$$[0, f] = \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} [0, f_k) \right) \sqcup S. \quad (3.26)$$

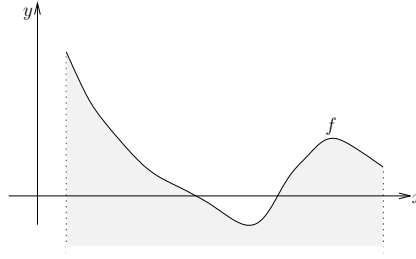
Her $[0, f_k)$ ölçülebilir, dolayısıyla $\bigcap_k [0, f_k)$ ölçülebilir. Ayrıca $A \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ ölçülebilir ve bir sıfır kümesi olduğundan (3.26) ile $[0, f]$ ölçülebilir. Eğer $\lambda_{n+1}([0, f)) = +\infty$ ise $[0, f) \subset [0, f]$ olduğundan $\lambda_{n+1}([0, f]) = +\infty = \lambda_{n+1}([0, f))$ olur. $\lambda_{n+1}([0, f)) < +\infty$ ise

$$\lambda_{n+1}([0, f_k)) = (1 + 1/k)\lambda_{n+1}([0, f)) < +\infty$$

olacağından, $[0, f_k) \downarrow \bigcap [0, f_k)$ olduğunu da gözetirsek, Önerme 3.2.20 (ii) ile

$$\lambda_{n+1}\left(\bigcap [0, f_k)\right) = \lim_k \lambda_{n+1}([0, f_k)) = \lim_k (1 + 1/k)\lambda_{n+1}([0, f)) = \lambda_{n+1}([0, f))$$

olur. $A \times \{0\}$ ise $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de bir sıfır kümesi olduğundan (3.26) ile $\lambda_{n+1}([0, f]) = \lambda_{n+1}([0, f))$ olur.

Şekil 3.4: Tam grafaltı $(-\infty, f)$

(ii) Şimdi $[0, f]$ ölçülebilir olsun. Bu kez her $k \in \mathbb{N}^*$ için $g_k := (1 - 1/k)f$ olsun. Yine $A \times \{0\}$ 'a düşen bir S sıfır kümesi ile $[0, g_k] \uparrow ([0, f] \sqcup S)$ olduğundan, Önerme 3.2.20 (ii) ile $\lambda_{n+1}([0, f]) = \lambda_{n+1}([0, f])$ olur. ■

Sonuç 3.3.6 f 'nin λ -ölçülebilir olması $(-\infty, f)$ 'nin ölçülebilir olmasına denktir.

Kanıt. $[f, 0]$ kümesi tam da $[0, f^+]$ 'nın $H := \mathbb{R}^n \times \{0\}$ hiperdüzleminde yansımasıdır; dolayısıyla biri ölçülebilirse diğeri de ölçülebilir. Diğer yandan $A \times (-\infty, 0]$ ve $A \times (-\infty, 0)$ kutuları Lebesgue ölçülebilir.

f λ -ölçülebilirse, H 'ye düşen bir S sıfır kümesi ile

$$(-\infty, f) = [0, f^+] \cup ((A \times (-\infty, 0]) \setminus [f, 0]) \cup S$$

olduğundan $(-\infty, f)$ ölçülebilir.

Tersine $(-\infty, f)$ ölçülebilirse $[0, f) = (-\infty, f) \setminus (A \times (-\infty, 0))$ ölçülebilir ve bir S sıfır kümesi ile

$$[f, 0] = ((-\infty, f) \setminus (A \times (-\infty, 0))) \cup S$$

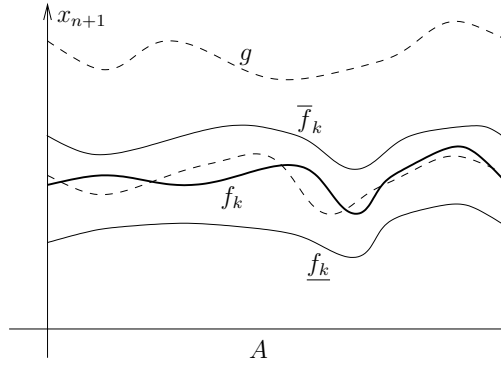
de ölçülebilir. Özetle f^+ ve f^- de λ -ölçülebilir. ■

Önerme 3.3.7 Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ λ -ölçülebilirse $\liminf f_k$ ve $\limsup f_k$ de λ -ölçülebilir.

Kanıt. $\underline{f}_k := \inf_{i \geq k} f_i(x)$, $\bar{f}_k := \sup_{i \geq k} f_i(x)$ olsun. Önerme 3.3.5'ten dolayı $[0, \underline{f}_i]$ ve $[0, \bar{f}_i]$ kümeleri ölçülebilir olduğundan,

$$[0, \underline{f}_k] = \bigcap_{i \geq k} [0, \underline{f}_i] \quad \text{ve} \quad [0, \bar{f}_k] = \bigcup_{i \geq k} [0, \bar{f}_i]$$

kümeleri ölçülebilir. Bu ve $\underline{f}_k \nearrow \underline{f} := \liminf f_k$, $\bar{f}_k \searrow \bar{f} := \limsup f_k$ bağıntıları savı verir. ■



Şekil 3.5: Lebesgue Sınırlandırılmış Yakınsaklık Teoremi.

Sonuç 3.3.8 $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ λ -ölçülebilir fonksiyonlar ve $f_k \rightarrow f$ ise f de λ -ölçülebilir.

Kanıt. $f_k \rightarrow f$ olduğundan $f_k \uparrow f$ olur. $[0, \underline{f}_k] \uparrow [0, f)$ ve her $\underline{f}_k$ λ -ölçülebilir olduğundan $[0, f)$ Lebesgue ölçülebilir. ■

Teorem 3.3.9 (Lebesgue Sınırlandırılmış Yakınsaklık Teoremi) $g : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ Lebesgue integrallenebilir, her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ λ -ölçülebilir ve $0 \leq f_k \leq g$ olsun. Ayrıca $f_k \xrightarrow{A} f$ ise f de Lebesgue integrallenebilir ve $\int_A f = \lim_k \int_A f_k$.

Kanıt. Şekil 3.5'e bakıldığında bu teoremin savı, kanıt gerektirmeyecek kadar, apaçık ortadadır. $\underline{f}_k$ ve $\bar{f}_k$, Önerme 3.3.7'nin kanıtındaki gibi olsunlar. Bu durumda her k için $\underline{f}_k \leq f_k \leq \bar{f}_k \leq g$, dolayısıyla $\lambda_{n+1}([0, \bar{f}_k]) < +\infty$ olur. Sonuç 3.3.8'den dolayı f λ -ölçülebilir. $[0, \underline{f}_k] \uparrow [0, f)$ ve $[0, \bar{f}_k] \downarrow [0, f)$ olduğundan $\lambda_{n+1}([0, \underline{f}_k]) \uparrow \lambda_{n+1}([0, f))$ ve $\lambda_{n+1}([0, \bar{f}_k]) \downarrow \lambda_{n+1}([0, f))$. Diğer yandan $\lambda_{n+1}([0, \underline{f}_k]) \leq \lambda_{n+1}([0, f_k]) \leq \lambda_{n+1}([0, \bar{f}_k])$ olduğundan savımız Sandviç Teoremi'nden çıkar. ■

Uyarı 3.3.10. Teoremimizde g 'nin varlığı çok önemlidir. Her $k \in \mathbb{N}^*$ için $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonun grafi, $[0, 1/k]$ 'de tabanı $[0, 1/k]$ ve alanı 1 olan ikizkenar üçgenin ikiz kenarları ve $[1/k, 1]$ 'de ise $f \equiv 0$ olsun. Bu durumda her k için $f_k \leq g$ koşulunu sağlayan Lebesgue integrallenebilir bir g yoktur. Ayrıca $f_k \rightarrow 0$ ve $1 = \int f_k \rightarrow 1 \neq 0 = \int \lim f_k$. Bu örnekte ve Örnek 2.4.11'de olduğu gibi her f_k ve $\exists \lim f_k = f$ integrallenebilir ancak $\lim \int f_k \neq \int f$ olabilir!

Teorem 3.3.11 (Fatou Önsavı) Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ λ -ölçülebilirse

$$\int_A \liminf f_k \leq \liminf \int_A f_k.$$

Kanıt. $f_k := \inf_{i \geq k} f_i(x)$ ve $\underline{f} := \liminf f_k$ olsun. $\underline{f}_k \uparrow \underline{f}$ olduğundan $[0, \underline{f}_k] \uparrow [0, \underline{f}]$, dd

$$\int_A \liminf f_k = \int_A \underline{f} = \lim \int_A \underline{f}_k. \quad (3.27)$$

Diğer yandan her $m \geq k$ için $\underline{f}_k \leq f_m$ olduğundan $\int_A \underline{f}_k \leq \inf_{m \geq k} \int_A f_m$. Dolayısıyla $\lim \int_A \underline{f}_k \leq \liminf \int_A f_k$. Bu (3.27) ile savı verir. ■

Not 3.3.12 $A \in \mathcal{L}^n$ sınırlı, $A_1, \dots, A_k$ Lebesgue ölçülebilir, $A = \bigsqcup_{i=1}^k A_i$ ve $\alpha_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f = \sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ tipindeki fonksiyonlara A da **sonlu Lebesgue merdivenleri** diyelim ve bu fonksiyonların kümesini $\mathcal{M}_{sl}(A)$ ile gösterelim.

$f = \sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{A_i} \in \mathcal{M}_{sl}(A)$ ve $\alpha_i \geq 0$ ise $[0, f] = \bigsqcup_i A_i \times [0, \alpha_i]$ ölçülebilir ve

$$\int_A f d\lambda_n = \lambda_{n+1}([0, f]) = \sum_i \lambda_{n+1}(A_i \times [0, \alpha_i]) = \sum_i \alpha_i \lambda_n(A_i). \quad (3.28)$$

f fonksiyonunun, A 'nın bir başka $B_1, \dots, B_m$ parçalanışına göre gösterimi $f = \sum_j \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$ ise elbette $\sum_j \beta_j \lambda_n(B_j) = \lambda_{n+1}([0, f]) = \sum_i \alpha_i \lambda_n(A_i)$ olur. $\mathcal{M}_{sl}(A)$ bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayı ve $\int_A : \mathcal{M}_{sl}(A) \rightarrow \mathbb{R}$ bir $\mathbb{R}$ -doğrusal dönüşümdür. ▲

3.3.2 Ölçülebilir Fonksiyonlar

Not. Bu altkısımda fonksiyonlar için “ölçülebilir” kavramını verecek ve bunun bir önceki altkısımda verdiğimiz “ λ -ölçülebilir” kavramıyla örtüştüğünü kanıtlayacağız. Bu kanıttan sonra “ λ -ölçülebilir” yerine de kısaca “ölçülebilir” adlandırmamızı kullanacağız. Genelde doğrudan ölçülebilir fonksiyonlardan yola çıkılır. Bu nedenle, bir önceki altkısımda λ -ölçülebilir fonksiyonlara ilişkin kanıtladığımız teoremleri, bir tekrar da olsa, ölçülebilir fonksiyonlar için yeniden kanıtlayacağız. ▲

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olmak üzere X 'teki $\sigma(\mathcal{T})$ σ -cebiri X 'in Borel cebiri demiş ve doğal topolojiyle alınmış $\mathbb{R}^n$ 'in Borel cebirini $\mathcal{B}^n$ ile göstermiştik.

Tanım 3.3.13 $A \in \mathcal{L}^n$, $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $f : A \rightarrow X$ olsun. Her $B \in \sigma(\mathcal{T})$ için $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}^n$ ise f dönüşümü **ölçülebilir** diyeceğiz.⁸

⁸“ $\mathcal{L}^n - \sigma(\mathcal{T})$ -ölçülebilir” demek daha doğru bir adlandırma olurdu! Topolojik uzaylarda sürekli fonksiyon tanımına benzerliğe dikkat ediniz.

Not 3.3.14 $A \in \mathcal{L}^n$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin. $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\hat{f}|A := f$ ve $\hat{f}|A^c \equiv 0$ olarak açıklansın. Her $B \in \mathcal{B}$ için $0 \notin B$ ise $\hat{f}^{-1}(B) = f^{-1}(B)$ ve $0 \in B$ ise $\hat{f}^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cup A^c$ olur. Bunun bir sonucu olarak f 'nin ölçülebilir olması $\hat{f}$ 'nin ölçülebilir olmasına denktir. $\blacktriangle$

$\mathcal{E}$ ailesi $\mathcal{B}^m$ 'in herhangi bir üretim sistemi ise: f ölçülebilir $\iff$ Her $E \in \mathcal{E}$ için $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}^n$. Biz ise 3.1.2'de $\mathcal{B}^m$ 'nin epeyce üreten sistemi ile tanıştık. $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$ olmak üzere f ve g ölçülebilirse, doğrudan tanımdan, $g \circ f$ ölçülebilir. Özellikle her sürekli f ölçülebilir. Bizi özellikle $\mathcal{B}^1$ ve $\overline{\mathbb{R}}$ 'nin $\overline{\mathcal{B}}^1$ Borel cebiri ilgilendirmektedir. Bu arada

$$\overline{\mathcal{B}}^1 = \{B \cup C | B \in \mathcal{B}^1, C \subset \{-\infty, +\infty\}\} = \{A \subset \overline{\mathbb{R}} | A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}^1\}$$

olduğu kolayca görülür. Her $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu bir $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu olarak düşünebiliriz. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ölçülebilir olmasının $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun ölçülebilir olmasına denk olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonlarına odaklanmak yeterlidir.

Bir $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu ve bir $c \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \{f > c\} &:= f^{-1}((c, +\infty]), \quad \{f \geq c\} := f^{-1}([c, +\infty]) \text{ ve} \\ \{f < c\} &:= f^{-1}([-\infty, c)), \quad \{f \leq c\} := f^{-1}([-\infty, c]) \end{aligned}$$

olarak açıklansınlar.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_+ &:= \{(c, +\infty] | c \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{E}_\geq := \{[c, +\infty] | c \in \mathbb{R}\} \text{ ve} \\ \mathcal{E}_- &:= \{[-\infty, c) | c \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{E}_\leq := \{[-\infty, c] | c \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

ailelerinin her biri $\overline{\mathcal{B}}^1$ 'in bir üreten sistemi olduğundan izleyen önsav apaçaktır.

Lemma 3.3.15 $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir $\iff$ Her $c \in \mathbb{R}$ için $\{f > c\}$ ölçülebilir $\iff$ Her $c \in \mathbb{R}$ için $\{f \geq c\}$ ölçülebilir $\iff$ Her $c \in \mathbb{R}$ için $\{f < c\}$ ölçülebilir $\iff$ Her $c \in \mathbb{R}$ için $\{f \leq c\}$ ölçülebilir.

Ayrıca bu, doğrudan aşağıdaki bağıntılardan da görülebilir:

$$\begin{aligned} \{f \geq c\} &= \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left\{ f > c - \frac{1}{k} \right\}, \quad \{f > c\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left\{ f \geq c + \frac{1}{k} \right\} \text{ ve} \\ \{f < c\} &= A \setminus \{f \geq c\}, \quad \{f \leq c\} = A \setminus \{f > c\}. \end{aligned}$$

Lemma 3.3.16 A, B ölçülebilir, $B \subset A$ ve $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ olsun.

(i) f ölçülebilirse $f|B$ de ölçülebilir.

(ii) I sayılabilir, her $i \in I$ için $A_i \subset A$ ölçülebilir ve $f|_{A_i}$ ölçülebilir olsun. Bu koşullarda $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ise f de ölçülebilir. A 'da hhy $f = g$ ve f ölçülebilir ise g de ölçülebilir.

Kanıt. $\{f|B > c\} = \{f > c\} \cap B$; bu (i)'yi verir. $\{f > c\} = \bigcup_{i \in I} \{f|A_i > c\}$; bu (ii)'yi verir. Şimdi $S \subset A$ bir sıfır kümesi ve $A \setminus S$ 'de $f = g$ olsun. Dolayısıyla g fonksiyonu $A \setminus S$ 'de ölçülebilir; S bir sıfır kümesi olduğundan S 'de de ölçülebilir, sonuçta (ii) ile A 'da ölçülebilir. ■

$f, g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ ise $\{f > g\} := \{x \in A | f(x) > g(x)\}$ olsun.

$\{f \geq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\}$ kümeleri benzer biçimde tanımlanırlar.

Önerme 3.3.17 $A \in \mathcal{L}^n$ ve $f, g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilirlerse $\{f > g\}, \{f \geq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\}$ kümelerinin her biri ölçülebilir.

Kanıt. $f(x) > g(x) \iff \exists r \in \mathbb{Q} (f(x) > r > g(x))$ olduğundan

$$\{f > g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f > r\} \cap \{r > g\}).$$

$\{f > r\} \cap \{r > g\}$ Lebesgue ölçülebilir olduğundan, sayılabilir çoklukta ölçülebilir kümenin birleşimi olarak $\{f > g\}$ Lebesgue ölçülebilir. Dolayısıyla sırasıyla $\{f \geq g\} = \{g > f\}^c$, $\{f = g\} = \{f \geq g\} \setminus \{f > g\}$ ve $\{f \neq g\} = \{f = g\}^c$ kümeleri de ölçülebilirler. ■

Önerme 3.3.18 $f, g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir ve $c \in \mathbb{R}, p > 0$ ise $f^+, f^-, cf, |f|^p$ (burada $(+\infty)^p := +\infty$ alınacaktır), A 'da sıfır değerini almıyorsa $1/f, fg$ ve eğer her yerde tanımlıysa $f + g$ fonksiyonları da ölçülebilir.

Kanıt. $A' := \{|f| < +\infty\}$, $F^+ := \{f = +\infty\}$ ve $F^- := \{f = -\infty\}$ olsun. $f^+, f^-, cf, |f|^p$ ve $1/f$ fonksiyonları, sırasıyla $\varphi(t) := t^+, t^-, ct, |t|^p, 1/t (t \neq 0)$ olmak üzere $\varphi \circ f$ fonksiyonlarıdır. φ fonksiyonu $f(A')$ 'de sürekli olduğundan $\varphi \circ f$ fonksiyonu A' 'de ölçülebilir. Bu fonksiyonların her biri ise F^+ ve F^- de sabit değerler aldıklarından bu kümelerde ölçülebilir; Önsav 3.3.16 (ii)'den dolayı ise fonksiyonlar A 'da ölçülebilirler.

Şimdi $f + g$ fonksiyonu A 'da tanımlı olsun. Her c için $\psi(t) = c - t$ sürekli olduğundan $\psi \circ g = c - g$ ölçülebilir. Dolayısıyla Önerme 3.3.17 ile her $c \in \mathbb{R}$ için $\{f + g > c\} = \{f > c - g\}$ ölçülebilir. Önsav 3.3.15'ten $f + g$ ölçülebilir.

$A_\infty := \{f = \pm\infty\} \cup \{g = \pm\infty\} = F^+ \cup F^- \cup G^+ \cup G^-$ kümesi ölçülebilir. Dolayısıyla fg 'nin $A_1 := A \setminus A_\infty$ 'da ölçülebilir olduğunu kanıtlamak yeterlidir. f ve g fonksiyonlarının A_1 'deki değerleri $\mathbb{R}$ 'de olduğundan A_1 'de, şimdiye kadar kanıtladıklarımızla, $fg = \frac{1}{2} (|f + g|^2 - |f|^2 - |g|^2)$ fonksiyonu ölçülebilir. ■

Sonuç 3.3.19 f ölçülebilir $\iff f^+, f^-$ ölçülebilir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ise, bilindiği gibi her $x \in A$ için:

$$\left(\inf_{k \geq 0} f_k \right) (x) = \inf \{ f_k(x) | k \in \mathbb{N} \}, \quad \left(\sup_{k \geq 0} f_k \right) (x) = \sup \{ f_k(x) | k \in \mathbb{N} \}$$

$$\liminf_k f_k = \sup_m \left(\inf_{k \geq m} f_k \right) \quad \text{ve} \quad \limsup_k f_k = \inf_k \left(\sup_{k \geq m} \right).$$

Önerme 3.3.20 Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir olsun.

- (i) $\inf_k f_k, \sup_k f_k, \liminf_k f_k, \limsup_k f_k$ fonksiyonları da ölçülebilirler.
- (ii) $\{x \in A | \exists \lim f_k(x)\}$ ölçülebilir.
- (iii) Her $x \in A$ için $(f_k(x))$ yakınsaksa $f = \lim f_k$ ölçülebilir.

Kanıt. (i) Bu savlar aşağıdaki bağıntılardan çıkarlar:

$$\left\{ \sup_k f_k \leq c \right\} = \bigcap_k \{ f_k \leq c \} \quad \text{ve} \quad \left\{ \inf_k f_k \geq c \right\} = \bigcap_k \{ f_k \geq c \}.$$

(ii) Önerme 3.3.17 ve $\{x \in A | \exists \lim f_k(x)\} = \{\liminf f_k = \limsup f_k\}$ 'den çıkar. (iii) ise doğrudan (ii)'den çıkar. ■

Not. Analizdeki tüm bildik limit işlemleri bizi ölçülebilir fonksiyonlardan ölçülebilir fonksiyonlara götürür. A kümesi ölçülemezse $\mathbf{1}_A$ fonksiyonu ölçülemez. Ölçülebilir fonksiyonunun tanımından dolayı ölçülemeyen bir fonksiyonun varlığı ölçülemeyen bir kümenin varlığına denktir. Bu nedenle pratikte karşılaştığımız fonksiyonlar hep ölçülebilir fonksiyonlardır. ▲

Önerme 3.3.21 $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ ölçülebilir fonksiyonu verilsin. $\varphi_k : A \rightarrow [0, +\infty]$ sonlu basamaklı merdiven fonksiyonları, (φ_k) monoton artan bir dizi ve her $x \in A$ için $f(x) = \lim_k \varphi_k(x)$ olacak biçimde bulunabilir. Eğer f sınırlı ise bu yakınsaklığın düzgün olması sağlanabilir.

Her $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir fonksiyonu için, sonlu basamaklı merdiven fonksiyonlarının bir (ψ_k) dizisi, her $x \in A$ için $|\psi_k(x)| \leq |f(x)|$ ve $\lim_k \psi_k(x) = f(x)$ olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. Her $k \in \mathbb{N}^*$ için $C_k := \{f \geq k\} = f^{-1}([k, +\infty])$ ve

$$\begin{aligned} A_{k\nu} &:= \left\{ \nu \cdot 2^{-k} \leq f < (\nu + 1) \cdot 2^{-k} \right\} \\ &= f^{-1} \left([\nu \cdot 2^{-k}, (\nu + 1) \cdot 2^{-k}) \right), \quad 0 \leq \nu < k2^k, \\ \varphi_k &:= \sum_{0 \leq \nu < k2^k} \nu \cdot 2^{-k} \cdot \mathbf{1}_{A_{k\nu}} + k \cdot \mathbf{1}_{C_k} \end{aligned}$$

olsunlar. $A_{k\nu} = A_{k+1,2\nu} \sqcup A_{k+1,2\nu+1}$ olduğundan $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$. Ayrıca $f(x) < k$ ise $0 \leq f(x) - \varphi_k(x) < 2^{-k}$ olduğundan $\varphi_k(x) \nearrow f(x)$ olduğu kolayca görülür. Eğer f sınırlı ise $0 \leq f(x) - \varphi_k(x) < 2^{-k}$ eşitsizliğinden görüldüğü gibi bu yakınsaklık düzgündür.

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir ise monoton artan sonlu merdivenlerin (ψ_k^+) ve (ψ_k^-) dizileri $\psi_k^+ \nearrow f^+$ ve $\psi_k^- \nearrow f^-$ olacak biçimde seçilir ve $\psi_k := \psi_k^+ - \psi_k^-$ olarak tanımlanırsa $|\psi_k| \leq |f|$ ve $f = \lim_k \psi_k$. ■

“ λ -ölçülebilir” ve “ölçülebilir” kavramları denktir, kanıtlayacağız. Önce iki önsav.

Lemma 3.3.22 *Ölçülebilir $f : A \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonları λ -ölçülebilir fonksiyonlardır.*

Kanıt. $p \geq 0$ için $A_p := \{f \geq p\}$ olsun. Varsayımımızdan A_p bir ölçülebilir kümedir. Ayrıca her $(x, y) \in A_p \times [0, p)$ için $y < f(x)$ olacağından $(x, y) \in [0, f)$ ve sonuçta $B_p := A_p \times [0, p) \subset [0, f)$ olur. Çarpım teoreminden dolayı $B_p \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kümesi ölçülebilir. Şimdi $r \geq 0$ rasyonel sayılarını $r_0, r_1, r_2, \dots$ olarak sıralarsak bu durumda $[0, f) = \bigcup_k B_{r_k}$, sayılabilir çoklukta ölçülebilir kümenin birleşimi olarak ölçülebilir. Dolayısıyla f λ -ölçülebilir. ■

Önsavın bir sonucu olarak ölçülebilir f için $\int_A f$ tanımlıdır.

Lemma 3.3.23 *$f : A \rightarrow [0, +\infty)$ ölçülebilir ve $\int_A f = 0$ ise $hhy f(x) = 0$.*

Kanıt. f ölçülebilir olduğundan $\int_A f$ tanımlıdır (bkz. Önsav 3.3.22) ve $\int_A f = \lambda_{n+1}([0, f)) = 0$. Her $k \in \mathbb{N}^*$ için $S_k := \{f \geq 1/k\}$ ölçülebilir ve $S_k \times [0, 1/k) \subset [0, f)$ olduğundan, Çarpım Teoremi ile

$$0 \leq \lambda_n(S_k) \cdot \frac{1}{k} = \lambda_{n+1}(S_k \times [0, 1/k)) \leq \lambda_{n+1}([0, f)) = \int_A f = 0$$

olur. Buradan her k için $\lambda_n(S_k) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $S := \bigcup_{k \geq 1} S_k \subset A$ bir sıfır kümesidir ve her $x \in A \setminus S$ için $f(x) = 0$. ■

Teorem 3.3.24 *$f : A \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul λ -ölçülebilir olmasıdır.*

Kanıt. Savın bir yönünü Önsav 3.3.22’de gösterdik. Diğer yönü iki adımda kanıtlayacağız. f λ -ölçülebilir olsun.

(1) $A = Q \in \mathcal{Q}^n$ bir kompakt kutu ve $0 < M \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $x \in A$ için $f(x) \leq M$ olsun. Teorem 3.2.24(ii) ile kapalı $K_i \subset [0, f) \subset Q \times [0, M]$ kümelerini ve bir $F \in \mathcal{F}_\sigma$ -kümesini $K_i \uparrow F \subset [0, f)$ ve $\lambda_{n+1}(F) = \lambda_{n+1}([0, f))$

olacak biçimde seçebiliriz. K_i 'ler aynı zamanda sınırlı olduklarından, kompakttırlar.

$$g_i(x) := \begin{cases} \max \{y | (x, y) \in K_i\} & , K_i \cap (Q \times \mathbb{R}) \neq \emptyset \\ 0 & , K_i \cap (Q \times \mathbb{R}) = \emptyset \end{cases}$$

olsun. (g_i) dizisi monoton artan ve üstten sınırlı olduğundan bir g fonksiyonuna yakınsar; ayrıca $g \leq f$ ve $\lambda_{n+1}([0, g)) = \lambda_{n+1}([0, f))$. Diğer yandan g_i üstten yarısürekli, dolayısıyla ölçülebilir⁹. Her $r \in \mathbb{R}$ için $g^{-1}((-\infty, r)) = \bigcup_i g_i^{-1}((-\infty, r))$ açık olduğundan g ölçülebilir. Benzer biçimde, Teorem 3.2.24(i) ile U_i açık kümeleri $[0, f) \subset U_i \subset Q \times [0, M]$, $U_i \downarrow U$ ve $\lambda_{n+1}(U) = \lambda_{n+1}([0, f))$ olacak biçimde seçebiliriz. Bu kez

$$h_i(x) := \begin{cases} \max \{y | (x, y) \in K_i\} & , U_i \cap (Q \times \mathbb{R}) \neq \emptyset \\ 0 & , U \cap (Q \times \mathbb{R}) = \emptyset \end{cases}$$

olarak tanımlarsak h_i fonksiyonları alttan yarısürekli; ayrıca $h_i \downarrow h$ ise $f \leq h$ ve $\lambda_{n+1}([0, h)) = \lambda_{n+1}([0, f))$. Dolayısıyla her $r \in \mathbb{R}$ için $h_i^{-1}((r, +\infty))$ kümesi açıktır; öyleyse ölçülebilir. Sonuç olarak her $r \in \mathbb{R}$ için $h^{-1}(r, +\infty) = \bigcap_i h_i^{-1}((r, +\infty))$ ölçülebilir. Sonuçta h ölçülebilir, $f \leq h$ ve $\lambda_{n+1}([0, f)) = \lambda_{n+1}([0, h))$. g ve h fonksiyonları ölçülebilir. $g \leq f \leq h$ ve $\int g \leq \int f \leq \int h$ ve $h = g + (h - g)$ olduğundan $\int (h - g) = 0$ olur. Önsav 3.3.23'ten dolayı A 'da hhy $h - g = 0$. Dolayısıyla A 'da hhy $f = h$ ve h ölçülebilir olduğundan f ölçülebilir.

(2) $A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olsun. Her $k \in \mathbb{N}^*$ için $Q_k^n = [-k, k] \times \dots \times [-k, k] \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $A_k = A \cap Q_k^n$ olsun. $f_k : Q_k^n \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu

$$f_k(x) := \begin{cases} \min \{f(x), k\} & x \in A_k \\ 0 & x \in Q_k^n \setminus A_k \end{cases}$$

olarak açıklansın. f_k ölçülebilir olduğundan (1)'den dolayı ölçülebilir. Dolayısıyla Q_k^n 'de f_k ve $\mathbb{R}^n \setminus Q_k^n$ 'de $\equiv 0$ olarak açıklanan $\hat{f}_k : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ $\hat{f}_k$ fonksiyonu ölçülebilir. $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu A 'da f ve $\mathbb{R}^n \setminus A$ 'da ise $\equiv 0$ olarak açıklansın. $\hat{f}_k \uparrow \hat{f}$ olduğundan $\hat{f}$ ölçülebilir. Dolayısıyla $f = \hat{f}|A$ ölçülebilir.

■

Not 3.3.25 Biz, iç ölçü ve özelliklerine girmedik. İç ölçüleri işleyen [9]'da “ λ -ölçülebilir fonksiyonların ölçülebilir” olmasının güzel bir kanıtını bulabilirsiniz. Bu kanıtı kısaca

⁹ X bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $a \in X$ ve $\lim x_i = a$ olan her $(x_i) \subset X$ dizisi için $\limsup f(x_i) \leq f(a)$ ise f fonksiyonu X 'te üstten yarı süreklidir denir. f 'nin üstten sürekli olması için gvyk her $r \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((-\infty, r))$ 'nin açık olmasıdır.

özetleyeceğiz. $E \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme, $I = [0, l]$ ($l \geq 0$) ve $Q := E \times I$ olsun. Bu durumda

$$\bar{\lambda}_{n+1}(Q) = l\bar{\lambda}_n(E) \text{ ve } \underline{\lambda}_{n+1}(Q) = l\underline{\lambda}_n(E). \quad (3.29)$$

Dolayısıyla Q 'nın ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul E 'nin ölçülebilir olmasıdır ve bu durumda $\lambda_{n+1}(Q) = \lambda_n(E) \cdot l$ (Bu, iç ölçüye girmeden, Çarpım Teoremi 3.2.26 ve Yaklaşım Teoremi 3.2.23 ile de görülebilir).

$f : A \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu λ -ölçülebilir olsun. Her $l, h \in \mathbb{R}$ ve $h > 0$ için $S_{l,h} := \mathbb{R}^n \times [l, l+h)$ olsun. $S_{l,h}$ ve $[0, f)$ ölçülebilir olduklarından $F_{l,h} := S_{l,h} \cap [0, f)$ de ölçülebilir.

$A_l := \{f > l\}$ olsun. Elbette $A_{l+h} \subset A_l$ ve $h \downarrow 0$ için $A_{l+h} \uparrow A_l$. Bu durumda $I = [0, h)$ olmak üzere $A_{l+h} \times I \subset F_{l,h} \subset A_l \times I$ olur. Buradan, iç ve dış ölçülerin monotonluğu ve (3.29) ile

$$h\bar{\lambda}_n(A_{l+h}) = \bar{\lambda}_{n+1}(A_{l+h} \times I) \leq \lambda_{n+1}(F_{l,h}) \leq \underline{\lambda}_{n+1}(A_l \times I) = h\underline{\lambda}_n(A_l).$$

Buradan $h \downarrow 0$ ile $\bar{\lambda}_n(A_l) \leq \underline{\lambda}_n(A_l)$ olur; dolayısıyla A_l ölçülebilir. Özellikle $A_0 = \{f > 0\}$ ölçülebilir, öyleyse $\{f = 0\} = A \setminus A_0$ ölçülebilir. $r \in \mathbb{R}$ ve $r < 0$ ise $\{f > r\} = A_0 \cup (A \setminus A_0)$ de ölçülebilir. Sonuçta her $r \in \mathbb{R}$ için $\{f > r\}$ ölçülebilir, dolayısıyla f ölçülebilir. ▲

Uzlaşma: “ λ -ölçülebilir” ve “ölçülebilir” denk kavramlar olduğu için bundan sonra her iki kavram için yalnız olarak “ölçülebilir” adlandırmasını kullanacağız.

Şimdi 3.3'te söylenen, değer bölgesinin parçalanışlarıyla çalışmanın yeterli olacağı savına açıklık getirelim. Önce $A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve ölçülebilir olsun. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir sınırlı ve ölçülebilir fonksiyon ve $f(A) \subset [\alpha, \beta]$ olsun. $f \geq 0$ durumunu irdelemek yeterlidir. $\alpha \leq l < l' \leq \beta$ için daima $f^{-1}([l, l'])$ Lebesgue ölçülebilir. $\alpha = l_0 < l_1 < \dots < l_k = \beta$ olmak üzere $1 \leq i \leq k$ için $Y_i := [l_{i-1}, l_i)$ ve $A_i = f^{-1}(Y_i)$ olsun. $\mathcal{Y} := \{Y_1, \dots, Y_k\}$ olmak üzere $\|\mathcal{Y}\| = \max_{1 \leq i \leq k} |l_i - l_{i-1}|$ olsun. $m_i = \inf f(A_i)$ ve $M_i = \sup f(A_i)$ olsun. $a_i \in A_i$ nasıl seçilirse seçilsin daima $l_{i-1} \leq m_i \leq f(a_i) \leq M_i \leq l_i$ geçerlidir. $A(f, \mathcal{Y}) := \sum m_i \lambda_n(A_i)$, $U(f, \mathcal{Y}) := \sum M_i \lambda_n(A_i)$ ve $R(f, \mathcal{Y}) := \sum f(a_i) \lambda_n(A_i)$, ayrıca $\varphi_{\mathcal{Y}} := \sum_{1 \leq i \leq k} l_{i-1} \mathbf{1}_{A_i}$ ve $\Phi_{\mathcal{Y}} := \sum_{1 \leq i \leq k} l_i \mathbf{1}_{A_i}$ olmak üzere

$$\sum_{1 \leq i \leq k} l_{i-1} \lambda_n(A_i) \leq A(f, \mathcal{Y}) \leq R(f, \mathcal{Y}) \leq U(f, \mathcal{Y}) \leq \sum_{1 \leq i \leq k} l_i \lambda_n(A_i) \quad (3.30)$$

geçerlidir. Şimdi $\mathcal{Y}$ parçalanışını inceltirsek

$$\int_A \varphi_{\mathcal{Y}} = \lambda_{n+1}([0, \varphi_{\mathcal{Y}}]) = \sum_{1 \leq i \leq k} l_{i-1} \lambda_n(A_i)$$

artarken $\int_A \Phi_{\mathcal{Y}} = \lambda_{n+1}([0, \Phi_{\mathcal{Y}}]) = \sum_{1 \leq i \leq k} l_i \lambda_n(A_i)$ azalır. $\|\mathcal{Y}\| \leq \varepsilon$ ise $|\int_A \Phi_{\mathcal{Y}} - \int_A \varphi_{\mathcal{Y}}| \leq \varepsilon \lambda_n(A)$ geçerlidir. Dolayısıyla $I := \sup_{\mathcal{Y}} \lambda_{n+1}([0, \varphi_{\mathcal{Y}}]) =$

$\inf_{\mathcal{Y}} \lambda_{n+1}([0, \Phi_{\mathcal{Y}}])$. Daima $\varphi_{\mathcal{Y}} \leq f \leq \Phi_{\mathcal{Y}}$ olduğundan $I = \int_A f = \lambda_{n+1}([0, f])$ olur. Böylece, A sınırlı ve $f : A \rightarrow [0, +\infty)$ sınırlı ve ölçülebilirse $\int_A f$ Lebesgue integralini, Riemann integralinde olduğu gibi, sonlu $\mathcal{Y}$ parçalanışlarından kazanılan sonlu $R(f, \mathcal{Y})$ toplamlarıyla kazanabileceğimizi öğrendik.

Şimdi A ölçülebilir ve $f : A \rightarrow [0, +\infty)$ ölçülebilir olsun. Her $k \in \mathbb{N}^*$ için $Q_{[k]} := [-k, k] \times \cdots \times [-k, k] \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $A_{[k]} := A \cap Q_{[k]}$ olmak üzere $f_{[k]} : A_{[k]} \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu

$$f_{[k]}(x) := \begin{cases} f(x) & f(x) \leq k \\ k & f(x) > k \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Yukarıdaki paragrafta $\int_{A_{[k]}} f_{[k]}$ ele alındı. Diğer yandan $f_{[k]} \uparrow f$ ve $[0, f_{[k]}] \uparrow [0, f)$ olduğundan

$$\int_A f = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{A_{[k]}} f_{[k]}$$

olur. Son iki paragraf Lebesgue integraline bir başka yaklaşımın kısa özeti-
tidir ve A 'nın, değer bölgesinin $\mathcal{Y}$ parçalanışlarından elde edilen, $f^{-1}(\mathcal{Y})$
parçalanışlarıyla çalışmanın yeterli olacağını da öğrenmiş olduk.

3.3.3 Riemann Tipi Yaklaşım

Uzlaşma: Bu altkısımda A hep Lebesgue ölçülebilir bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesini, $\mathbb{K}$ ise $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere V daima bir $\mathbb{K}$ Banach uzayını gösterecektir. Fonksiyonlarımız ise daima A 'da tanımlı V değerli olacaktır. Özellikle daima $f : A \rightarrow V$ olacaktır.

$A \in \mathcal{L}^n$ olmak üzere A 'nın bir $\mathcal{Z}$ parçalanışından $A = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ olan bir $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{L}^n$ sayılabilir ayrık ailesi anlaşılacaktır. A 'nın sayılabilir parçalanışlarının kümesi $\mathfrak{Z}_A$ ile gösterilecektir. Bir $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I} \in \mathfrak{Z}_A$ parçalanışını bazen $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \geq 1}$ olarak göstereceğiz; böyle yazdığımızda bir $k \in \mathbb{N}$ ile her $i \geq k$ için $A_i = \emptyset$ olabilir. A 'nın $\mathcal{Z} = \{A_i\}$ ve $\mathcal{Z}' = \{A'_j\}$ gibi iki parçalanış verildiğinde her bir A_i bir takım A'_j 'lerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa – başka sözlerle, her bir A'_j bir A_i 'nin altkümesi ise – $\mathcal{Z}'$ parçalanışı $\mathcal{Z}$ parçalanışından **daha incedir** diyecek ve bunu $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$ ile göstereceğiz. $\mathcal{Z} = \{A_i\}$ ve $\mathcal{Z}' = \{A'_j\}$ parçalanışlarının her ikisi de $\mathfrak{Z}_A$ 'da ise $\mathcal{Z}\mathcal{Z}' := \{A_i \cap A'_j\} \in \mathfrak{Z}_A$ ve $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}\mathcal{Z}'$, $\mathcal{Z}' \prec \mathcal{Z}\mathcal{Z}'$. Özetle $(\mathfrak{Z}_A, \prec)$ yukarı doğru yönlendirilmiş bir kümedir. $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I} \in \mathfrak{Z}_A$ ve her $i \in I$ için bir $a_i \in A_i$ seçilmişse, bunu yine kısaca $\mathcal{Z}(a)$ ile göstereceğiz. Bu $\mathcal{Z}(a)$ 'ların kümesini yine $\mathfrak{Z}_A^*$ ile göstereceğiz.

$\mathcal{Z}(a), \mathcal{Z}'(a') \in \mathfrak{Z}_A^*$ için yine

$$\mathcal{Z}(a) \prec \mathcal{Z}'(a') : \Longleftrightarrow \mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$$

olarak açıklansın. $(\mathfrak{Z}_A^*, \prec)$ yukarı doğru yönlendirilmiştir.

Bir $B \subset A$ için

$$\text{sl}(f, B) := \sup_{x, y \in B} \|f(x) - f(y)\|,$$

$\text{sl}(f, B) = +\infty$ olabilir. Her $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I} \in \mathfrak{Z}_A$ için bu kez

$$\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i \in I} \text{sl}(f, A_i) \lambda_n(A_i).$$

Elbette $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) = +\infty$ olabilir.

Eğer $V \neq \mathbb{R}$ ise f 'nin grafaltı anlamsızdır; benzer biçimde alttoplam, üsttoplam, altintegral ve üstintegral kavramları anlamını yitirir. Diğer yandan Lebesgue integralinin Riemann integralini genelleştirmesini istiyorsak, özellikle her Riemann integrallenebilir fonksiyonun Lebesgue integrallenebilir olmasını istiyorsak, f fonksiyonumuz ε -ölçütü benzeri bir koşulu sağlamalıdır.

Tanım 3.3.26 Her $\varepsilon > 0$ için bir $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A$ parçalanışı $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) \leq \varepsilon$ olacak biçimde bulunabiliyorsa f fonksiyonu ε -ölçülebilir diyelim.

Sonuç 3.3.27 $f, g : A \rightarrow V$ fonksiyonları ε -ölçülebilir ve $a, b \in \mathbb{K}$ ise $af + bg$ ve $\|f\|$ fonksiyonları da ε -ölçülebilir.

Kanıt. Savımız doğrudan

$$\text{Sl}(af + bg, \mathcal{Z}) \leq \|a\| \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) + \|b\| \text{Sl}(g, \mathcal{Z})$$

ve $\text{Sl}(\|f\|, \mathcal{Z}) \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z})$ eşitsizliklerinden çıkar. ■

f fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilir olması için ε -ölçülebilir olması bir ön koşuldur. $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I} \in \mathfrak{Z}_A$ ve her $i \in I$ için $v_i \in V$ olmak üzere $f := \sum_{i \in I} v_i \mathbf{1}_{A_i}$ tipindeki fonksiyonlara **basit fonksiyonlar** diyelim. $i, j \in I$ için $i \neq j$ olduğunda daima $v_i \neq v_j$ ise f **normal gösterim**dedir diyelim. Her basit fonksiyon normal gösterime getirilebilir. $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) = 0$ olduğundan her basit f fonksiyonu ε -ölçülebilir.

Riemann integralinde, $A \in \mathcal{J}^n$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı, $\mathcal{Z} = \{A_1, \dots, A_k\} \in \mathfrak{Z}(A)$ ve $a_i \in A_i$ olmak üzere, $\sum_{i=1}^k f(a_i) j_n(A_i)$ toplamalarının limitlerine odaklandık. $f(a_i), j_n(A_i) \in \mathbb{R}$ olduğu için bu sonlu toplamaları oluşturmada bir sorunla karşılaşmadık.

Şimdi ise I sayılabilir ve $\mathcal{Z}(a) = \{A_i\}_{i \in I} \in \mathfrak{Z}_A^*$ olmak üzere

$$R(f, \mathcal{Z}(a)) := \sum_{i \in I} f(a_i) \lambda_n(A_i) \quad (3.31)$$

Lebesgue toplamlarının limitine odaklanacağız. Riemann integralindeki *sonlu* toplamlardan *sayılabilir* toplamlara geçtik.

Ancak (3.31)'in bir anlamı olabilmesi için her şeyden önce her bir $i \in I$ için $f(a_i) \lambda_n(A_i) \in V$, dolayısıyla $\lambda_n(A_i) \in \mathbb{R}$ *olmalıdır*.

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_A^< &:= \{ \mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I} \mid \forall i \in I : \lambda_n(A_i) < +\infty \} \text{ ve} \\ \mathfrak{Z}_A^{* <} &:= \{ \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A^* \mid \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A^< \} \end{aligned}$$

olsun. Yine (3.31)'in bir anlamı olabilmesi için $(f(a_i) \lambda_n(A_i))_{i \in I}$ *ailesi toplanabilir*, dolayısıyla mutlak yakınsak olmalıdır; özetle

$$\sum_{i \in I} \|f(a_i)\| \lambda_n(A_i) < +\infty \quad (3.32)$$

olmalıdır. Şimdi $\lambda_n(A) = +\infty$ ve bir $0 \neq v \in V$ ile $f \equiv v$ olsun. Her $\mathcal{Z}$ parçalanışı için $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) = 0$ olduğundan f fonksiyonu ε -ölçülebilir. Ancak $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A^{* <}$ nasıl seçilirse seçilsin daima $\sum_{i \in I} \|f(a_i)\| \lambda_n(A_i) = \sum_{i \in I} \|v\| \lambda_n(A_i) = \|v\| \lambda_n(A) = +\infty$!

Not 3.3.28 Daha önce $\mathcal{M}_r(\Omega)$ Riemann merdiven fonksiyonları ile tanıştık.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_l(A, V) \\ := \left\{ \sum_{i \in I} v_i \mathbf{1}_{A_i} \mid v_i \in V, \mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I} \in \mathfrak{Z}_A^<, \sum_{i \in I} \lambda_n(A_i) \|v_i\| \text{ yakınsak} \right\} \end{aligned}$$

kümesine A 'daki **Lebesgue merdivenlerinin** kümesi diyelim. Riemann merdivenlerinde olduğu gibi $\mathcal{M}_l(A, V)$ bir $\mathbb{K}$ -vektör uzayı olduğu kolayca görülür. Riemann merdivenlerinde olduğu gibi, eğer $\sum_{i \in I} v_i \mathbf{1}_{A_i}$ ve $\sum_{j \in J} w_j \mathbf{1}_{B_j}$, f Lebesgue merdiveninin iki farklı gösterimi ise $\sum_{i \in I} \|v_i\| \lambda_n(A_i) = \sum_{j \in J} \|w_j\| \lambda_n(B_j)$ olduğu kolayca görülür ve

$$\int_A f \equiv \int_A f d\lambda_n := \sum_{i \in I} v_i \lambda_n(A_i)$$

olarak açıklanır. $\int_A : \mathcal{M}_l(A, V) \rightarrow V$ dönüşümünün $\mathbb{K}$ -doğrusal olduğu kolayca görülür. Kolmogorov-Fomin [24]'te $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ve $V = \mathbb{R}$ durumunu incelerler. Lebesgue merdivenleri (Alt kısım 3.3.2 anlamında) ölçülebilir fonksiyonlardır. h ölçülebilir, $(f_k), (g_k) \subset \mathcal{M}_l(A, \mathbb{R})$ ve $f_k \xrightarrow{A} h$, $g_k \xrightarrow{A} h$ ise $\lim \int_A f_k = \lim \int_A g_k$ olduğunu kanıtlar ve $\int_A h := \lim \int_A f_k$ olarak açıklarlar. A 'da Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar tam da bu tip h fonksiyonlardır ve $\int_A h$ ise onların Lebesgue integralidir. Biz bu yolu izlemeyeceğiz; ancak okura bu güzel kitaba göz atmasını öneririz. $\blacktriangle$

Lemma 3.3.29 $f : A \rightarrow V$, $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \geq 1} \in \mathfrak{Z}_A^<$ ve $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) \leq \varepsilon$ olsun. $a_i, a'_i \in A_i$ olmak üzere $\sum_{i \geq 1} f(a_i) \lambda_n(A_i)$ ve $\sum_{i \geq 1} f(a'_i) \lambda_n(A_i)$ serilerinden biri mutlak yakınsaksa diğeri de mutlak yakınsaktır ve

$$\left\| \sum_{i \geq 1} f(a_i) \lambda_n(A_i) - \sum_{i \geq 1} f(a'_i) \lambda_n(A_i) \right\| \leq \varepsilon. \quad (3.33)$$

Kanıt. Her $i \geq 1$ için

$$\|f(a_i) \lambda_n(A_i) - f(a'_i) \lambda_n(A_i)\| = \|f(a_i) - f(a'_i)\| \lambda_n(A_i) \leq \text{sl}(f, \mathcal{Z}) \lambda_n(A_i),$$

dolayısıyla

$$\sum_{i \geq 1} \|f(a_i) \lambda_n(A_i) - f(a'_i) \lambda_n(A_i)\| \leq \varepsilon$$

ve sav buradan çıkar. ■

Lemma 3.3.30 $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}' \in \mathfrak{Z}_A$ ve $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$ ise $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}') \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z})$.

Kanıt. $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \geq 1}$ ve $\mathcal{Z}' = \{B_j\}_{j \geq 1}$ olsun. Paketleme teoremi ile

$$\begin{aligned} \text{Sl}(f, \mathcal{Z}') &= \sum_{j \geq 1} \text{sl}(f, B_j) \lambda_n(B_j) = \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{B_j \subset A_i} \text{sl}(f, B_j) \lambda_n(B_j) \right) \leq \\ &\leq \sum_{i \geq 1} \left(\sum_{B_j \subset A_i} \text{sl}(f, A_i) \lambda_n(B_j) \right) = \sum_{i \geq 1} \text{sl}(f, A_i) \lambda_n(A_i) = \text{Sl}(f, \mathcal{Z}). \end{aligned}$$
■

Önerme 3.3.31 $f : A \rightarrow V$, $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I}$ ve $\mathcal{Z}' = \{A'_j\}_{j \in J}$ parçalanışları $\mathfrak{Z}_A^<$ 'da olmak üzere $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < +\infty$, $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}') < +\infty$ olsun. Bu koşullarda $R(f, \mathcal{Z}(a))$ ve $R(f, \mathcal{Z}'(a'))$ Lebesgue toplamlarından biri mutlak yakınsaksa, diğeri de mutlak yakınsaktır ve

$$\|R(f, \mathcal{Z}(a)) - R(f, \mathcal{Z}'(a'))\| \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) + \text{Sl}(f, \mathcal{Z}'). \quad (3.34)$$

Kanıt. (1) $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$ olsun. $R(f, \mathcal{Z}(a))$ mutlak yakınsaksa

$$\sum_{i \in I} \|f(a_i)\| \lambda_n(A_i) = \sum_{i \in I} \|f(a_i)\| \left(\sum_{A'_j \subset A_i} \lambda_n(A'_j) \right) \quad (3.35)$$

$$= \sum_{i \in I, j \in J, B_j \subset A_i} \|f(a_i)\| \lambda_n(A'_j) \quad (3.36)$$

olur. Tersine (3.35) eşitliğinin sağındaki seri yakınsaksa solundaki seri de yakınsaktır. Dolayısıyla mutlak yakınsaklık durumunda

$$\sum_{i \in I} f(a_i) \lambda_n(A_i) = \sum_{i \in I, j \in J, A'_j \subset A_i} f(a_i) \lambda_n(A'_j) \quad (3.37)$$

(3.37) eşitliğinin sağındaki serinin terimlerini $\sum_{j \in J} f(a'_j) \lambda_n(A'_j)$ serisinin terimleriyle kıyaslayacağız. Her sonlu alttoplam için

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \|f(a_i) - f(a'_j)\| \lambda_n(A'_j) &\leq \sum_{i,j} \text{sl}(f, A_i) \lambda_n(A'_j) \\ &\leq \sum \text{sl}(f, A_i) \lambda_n(A_i) \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z}). \end{aligned}$$

Dolayısıyla $R(f, \mathcal{Z}(a))$ ve $R(f, \mathcal{Z}'(a'))$ Lebesgue toplamlarından biri mutlak yakınsaksa diğeri de mutlak yakınsaktır ve

$$\|R(f, \mathcal{Z}(a)) - R(f, \mathcal{Z}'(a'))\| \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z})$$

geçerlidir.

(2) Genel durumda $\mathcal{Z}'' := \mathcal{Z}\mathcal{Z}' = \{A''_k\}_{k \in K}$ olsun ve $a''_k \in A''_k$ noktaları keyfi seçilsinler. Bu durumda (1)'den dolayı $R(f, \mathcal{Z}(a))$ 'nın ve $R(f, \mathcal{Z}'(a'))$ 'nin mutlak yakınsaklıkları, ayrı ayrı $R(f, \mathcal{Z}''(a''))$ 'nin mutlak yakınsaklığına denktirler. Dolayısıyla $R(f, \mathcal{Z}(a))$ 'nın mutlak yakınsaklığı $R(f, \mathcal{Z}'(a'))$ 'nin mutlak yakınsaklığına denktir ve

$$\begin{aligned} \|R(f, \mathcal{Z}(a)) - R(f, \mathcal{Z}'(a'))\| &\leq \|R(f, \mathcal{Z}(a)) - R(f, \mathcal{Z}''(a''))\| \\ &\quad + \|R(f, \mathcal{Z}''(a'')) - R(f, \mathcal{Z}'(a'))\| \\ &\leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) + \text{Sl}(f, \mathcal{Z}'). \end{aligned}$$

■

Lebesgue integrali, Riemann integralinde olduğu gibi Lebesgue toplamlarının limiti olacaksa, f fonksiyonumuz için elimizde en azından mutlak yakınsak bir Lebesgue toplamımız olmalıdır. Dolayısıyla fonksiyonumuz, **(AK)** ile göstereceğimiz bir **asgari koşulu** sağlamalıdır:

$$\textbf{(AK)} \quad \exists \mathcal{Z}(a) \in \mathfrak{Z}_A^{* <} \quad (\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < +\infty \text{ ve } R(f, \mathcal{Z}(a)) \text{ mutlak yakınsak.})$$

Önsav 3.3.29 ve 3.3.31'den dolayı,

$$\mathfrak{Z}_f^{<} := \{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A^{<} \mid \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < +\infty\}$$

olmak üzere her $\mathcal{Z}(a) \in \mathfrak{Z}_f^{* <}$ için $R(f, \mathcal{Z}(a))$ mutlak yakınsaktır. Dikkat edilirse $(R(f, \mathcal{Z}(a)))_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_f^{* <}}$, V 'de bir ağdır.

Lemma 3.3.32 $f : A \rightarrow V$ fonksiyonu ε -ölçülebilir ve (AK) asgari koşulunu sağlıyorsa $(R(f, \mathcal{Z}(a)))_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_f^<}$ ağı V 'de bir Cauchy ağıdır; dolayısıyla V tam olduğundan bu ağ yakınsaktır.

Kanıt. f fonksiyonu asgari koşulu sağladığından $\mathfrak{Z}_f^< \neq \emptyset$. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. f fonksiyonu ε -ölçülebilir olduğundan $\text{Sl}(f, \mathcal{A}) \leq \varepsilon/2$ olacak biçimde bir $\mathcal{A} \in \mathfrak{Z}_A$ vardır. Her $\mathcal{B} \in \mathfrak{Z}_A^<$ için Önsav 3.3.30'dan $\mathcal{C} := \mathcal{A}\mathcal{B} \in \mathfrak{Z}_A^<$ ve $\text{Sl}(f, \mathcal{C}) \leq \varepsilon/2$ olur. Her $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}' \in \mathfrak{Z}_A^<$ için $\mathcal{C} \prec \mathcal{Z}$ ve $\mathcal{C} \prec \mathcal{Z}'$ ise Önsav 3.3.30 ve 3.3.31 ile

$$\|R(f, \mathcal{Z}) - R(f, \mathcal{Z}')\| \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) + \text{Sl}(f, \mathcal{Z}') \leq \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla $(R(f, \mathcal{Z}))_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A^{*<}}$ bir Cauchy ağıdır ve Teorem 1.1.5'ten dolayı yakınsaktır. ■

Tanım 3.3.33 $f : A \rightarrow V$ (AK) koşulunu sağlayan ε -ölçülebilir bir fonksiyonsa

$$\int_A f \equiv \int_A f d\lambda_n := \lim_{\mathcal{Z}(a) \in \mathfrak{Z}_f^{*<}} R(f, \mathcal{Z}(a))$$

limitine f 'nin A 'da **Lebesgue integrali** denir.

$$\mathcal{L}(A, V) := \{f | f : A \rightarrow V \text{ Lebesgue integrallenebilir}\}.$$

Teorem 3.3.34 (Dizi Ölçütü) $f : A \rightarrow V$ (AK) koşulunu sağlayan ε -ölçülebilir bir fonksiyonsa $\lim \text{Sl}(f, \mathcal{Z}_k) = 0$ koşulunu sağlayan $(\mathcal{Z}_k) \subset \mathfrak{Z}_f^<$ dizileri vardır ve $(\mathcal{Z}_k)$ böyle bir dizi ise

$$\int_A f \equiv \int_A f d\lambda_n = \lim_k R(f, \mathcal{Z}_k).$$

Kanıt. (i) $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin ve $\mathcal{Z}_\varepsilon$ parçalanışı $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon$ olacak biçimde seçilsin. Önsav 3.3.30'dan dolayı her $\mathcal{Z} \succ \mathcal{Z}_\varepsilon$ için

$$\|R(f, \mathcal{Z}(a)) - R(f, \mathcal{Z}(a'))\| \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon \quad (3.38)$$

olur. Dolayısıyla $(R(f, \mathcal{Z}(a)))$ bir Cauchy ağıdır ve Teorem 1.1.5'ten ötürü yakınsaktır.

(ii) $(\mathcal{Z}_k), (\mathcal{Z}'_k) \subset \mathfrak{Z}(\Omega)$ dizileri $\lim_{k \geq 1} \text{Sl}(f, \mathcal{Z}_k) = 0 = \lim_{k \geq 1} \text{Sl}(f, \mathcal{Z}'_k)$ olacak biçimde verilsinler. (3.38) eşitsizliğinden $(R(f, \mathcal{Z}_k))$ ve $(R(f, \mathcal{Z}'_k))$ dizileri yakınsaktırlar. (3.34)'ten

$$\|R(f, \mathcal{Z}_k) - R(f, \mathcal{Z}'_k)\| \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z}_k) + \text{Sl}(f, \mathcal{Z}'_k) \rightarrow 0,$$

dolayısıyla $\lim R(f, \mathcal{Z}_k) = \lim R(f, \mathcal{Z}'_k)$.

Eğer daha baştan $\mathcal{Z}_1 \prec \mathcal{Z}_2 \prec \dots$ değilse $\mathcal{W}_1 := \mathcal{Z}_1$ ve $k \geq 2$ için $\mathcal{W}_k := \mathcal{Z}_1 \cdots \mathcal{Z}_k$ alarak $\mathcal{W}_1 \prec \mathcal{W}_2 \prec \dots$ sağlanır. Elbette $\lim \text{Sl}(f, \mathcal{W}_k) = 0$. Az önce kanıtlanandan $(R(f, \mathcal{W}_k))$ dizisi yakınsaktır; $\mathcal{W}_1 \prec \mathcal{W}_2 \prec \dots$ olduğundan bu limit $(R(f, \mathcal{Z}))$ Cauchy ağının limitidir. ■

Önerme 3.3.35 $\mathcal{L}(A, V)$ bir $\mathbb{K}$ -vektör uzayıdır ve $\int_A : \mathcal{L}(A, V) \rightarrow V$ dönüşümüm $\mathbb{K}$ -doğrusaldır, dd $\forall f, g \in \mathcal{L}(A, V)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{K}$ için $af + bg \in \mathcal{L}(A, V)$ ve

$$\int_A (af + bg) = a \int_A f + b \int_A g. \quad (3.39)$$

Ayrıca $f \in \mathcal{L}(A, V)$ ise $\|f\| \in \mathcal{L}(A, \mathbb{R})$ ve

$$\left\| \int_A f \right\| \leq \int_A \|f\|. \quad (3.40)$$

Kanıt. Sonuç 3.3.27'den dolayı $af + bg$ ve $\|f\|$ fonksiyonları ε -ölçülebilir. (3.39) limit kurallarından çıkar. $\text{Sl}(\|f\|, \mathcal{Z}) \leq \text{Sl}(f, \mathcal{Z})$ eşitsizliği ve $f \in \mathcal{L}(A, V)$ 'den $f \in \mathcal{L}(A, \mathbb{R})$ elde edilir. $\mathcal{Z}_i \in \mathfrak{Z}_f^{<}$ parçalanışları $\lim_i \text{Sl}(f, \mathcal{Z}_i) = 0$ olacak biçimde seçilsin. Bu durumda $\lim_i \text{Sl}(\|f\|, \mathcal{Z}_i) = 0$ olur. Her bir $\mathcal{Z}_i$ 'yi $\mathcal{Z}_i = \{A_{ik}\}_{k \geq 1}$ olarak yazalım ve $a_{ij} \in A_{ij}$ noktalarını keyfi seçelim. Her $k \in \mathbb{N}^*$ için

$$\forall i, k \in \mathbb{N}^* \text{ için } \left\| \sum_{j=1}^k f(a_{ij}) \lambda_n(A_{ij}) \right\| \leq \sum_{j=1}^k \|f(a_{ij})\| \lambda_n(A_{ij})$$

olduğundan her i için $\|R(f, \mathcal{Z}_i)\| \leq R(\|f\|, \mathcal{Z}_i)$ olur. Bu eşitsizlikte $i \rightarrow +\infty$ limitine geçerse $\left\| \int_A f \right\| \leq \int_A \|f\|$ olur. ■

Riemann integralinde olduğu gibi burada da bu temel bilgilerle yetineceğiz ve genelde olduğu gibi $\overline{\mathbb{R}}$ -değerli fonksiyonları incelemeye yöneleceğiz. Bu fonksiyonlar açıkça $\mathbb{R}$ -değerli fonksiyonları kapsar. $\mathbb{R}$ -değerli fonksiyonlar içinse elimizde “ λ -ölçülebilir”, “ölçülebilir” ve “ ε -ölçülebilir” gibi üç farklı kavram var. İlk ikisinin denklğini daha önce kanıtladık. $\mathbb{R}$ -değerli fonksiyonlar için bu üç kavramın denk olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem 3.3.36 $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue ölçülebilir ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

- (i) Her $\varepsilon > 0$ için bir $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A^{<}$ parçalanışı $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) \leq \varepsilon$ olacak biçimde vardır.
- (ii) Her $\varepsilon > 0$ için bir $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I} \in \mathfrak{Z}_A^{<}$ parçalanışı her $i \in I$ için $\text{sl}(f, A_i) \leq \varepsilon$ olacak biçimde vardır.

Kanıt. (i) $\implies$ (ii): (i) sağlansın ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Her $r > 0$ için A 'nın bir $\mathcal{Z}_r = \left\{ A_i^{(r)} \right\}_{i \geq 1}$ parçalanışını

$$\text{Sl}(f, \mathcal{Z}_r) = \sum_{i \geq 1} \text{sl}(f, A_i^{(r)}) \lambda_n(A_i^{(r)}) \leq \frac{\varepsilon}{r}$$

olacak biçimde seçelim. $I_r := \left\{ i \in \mathbb{N}^* \mid \text{sl}(f, A_i^{(r)}) \leq \varepsilon \right\}$ olsun. $J_r := \mathbb{N} \setminus I_r$ dersek

$$\varepsilon \cdot \left(\sum_{i \in J_r} \lambda_n(A_i^{(r)}) \right) \leq \sum_{i \in J_r} \text{sl}(f, A_i^{(r)}) \lambda_n(A_i^{(r)}) \leq \frac{\varepsilon}{r}$$

olur. $B_r := \bigsqcup_{i \in J_r} A_i^{(r)}$ dersek $\lambda_n(B_r) \leq 1/r$ olur. $\mathcal{Z}'_r = \left\{ A_i^{(r)} \right\}_{i \in I_r} \sqcup \{B_r\}$ olsun. Elbette $\mathcal{Z}'_r \in \mathfrak{Z}_A^<$. Şimdi sırasıyla $r = 1, 2, \dots$ alacağız. $\mathcal{Z}'_1$ ile

$$A = \left(\bigsqcup_{i \in I_1} A_i^{(1)} \right) \sqcup B_1$$

elde ederiz. $\mathcal{Z}'_2$ ile B_1 'in

$$B_1 = \left(\bigsqcup_{i \in I_2} A_i^{(2)} \cap B_1 \right) \sqcup (B_1 \cap B_2)$$

parçalanışını elde ederiz. Bu işlemi sürdürürsek A 'nın

$$\begin{aligned} A &= \left(\bigsqcup_{i \in I_1} A_i^{(1)} \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i \in I_2} A_i^{(2)} \cap B_1 \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i \in I_3} A_i^{(3)} \cap B_1 \cap B_2 \right) \sqcup \dots \\ &\dots \sqcup \left(\bigsqcup_{i \in I_r} \left(A_i^{(r)} \cap \bigcap_{\rho=1}^{r-1} B_\rho \right) \right) \sqcup \dots \sqcup \bigcap_{\rho=1}^{+\infty} B_\rho \end{aligned}$$

parçalanışını elde ederiz. $\left\{ A_i^{(1)} \mid i \in I_1 \right\} \cup \left\{ A_i^{(r)} \cap \bigcap_{\rho=1}^{r-1} B_\rho \mid i \in I_r, r = 2, 3, \dots \right\}$ ailesi sayılabilir çoklukta ayırık ölçülebilir kümelerden oluşur. Bunları $C_1, C_2, \dots$ olarak sıralayalım. Tanım gereği daima $\text{sl}(f, C_k) \leq \varepsilon$. Diğer yandan $B := \bigcap_{\rho \geq 1} B_\rho$ olmak üzere $\lambda_n(B) = 0$ ve $A = \left(\bigsqcup_{k \geq 1} C_k \right) \sqcup B$. Şimdi $\mathbb{R}^m$ uzayımızı çapları $\leq \varepsilon$ olan sağdan yarıaçık $Q_1, Q_2, \dots$ küplerine parçalayalım. $D_l := B \cap f^{-1}(Q_l)$ dersek bir yandan $\text{sl}(f, D_l) \leq \varepsilon$ olurken, diğer yandan bir sıfır kümesinin altkümeleri olarak D_l kümeleri ölçülebilir kümelerdir. Sonuçta A 'nın $\{C_k\}_{k \geq 1} \cup \{D_l\}_{l \geq 1}$ parçalanışıyla (ii) sağlanır.

(ii) $\implies$ (i): $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Koşulumuzdan her $k \in \mathbb{N}^*$ için bir $\mathcal{Z}_k = \left\{ A_i^{(k)} \right\}_{i \geq 1} \in \mathfrak{Z}_A^<$ parçalanışını her i için $\text{sl}(f, A_i^{(k)}) \leq \varepsilon 2^{-k}$ olacak biçimde seçebiliriz. $\{Q_k\}_{k \geq 1}$ ailesi $\mathbb{R}^n$ 'nin birim küplere bir parçalanışı olsun. Bu durumda $A = \bigsqcup_{k \geq 1} A \cap Q_k$ ve $\lambda_n(A \cap Q_k) \leq 1$. Şimdi her bir $A \cap Q_k$ 'yi $\mathcal{Z}_k$ ile parçalayarak A 'nın $\mathcal{Z} = \left\{ A_i^{(k)} \cap Q_k \right\}_{i,k \geq 1}$ parçalanışını elde edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \text{Sl}(f, \mathcal{Z}) &= \sum_{i,k \geq 1} \text{sl}(f, A_i^{(k)} \cap Q_k) \lambda_n(A_i^{(k)} \cap Q_k) \leq \sum_{i,k \geq 1} \varepsilon 2^{-k} \lambda_n(A_i^{(k)} \cap Q_k) \leq \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \varepsilon 2^{-k} \lambda_n(A \cap Q_k) \leq \sum_{k \geq 1} \varepsilon 2^{-k} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Sonuçta (i) sağlanır ve işimiz biter. ■

Teorem 3.3.37 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ için aşağıdaki önermeler denktirler:

- (i) f λ -ölçülebilir.
- (ii) f ölçülebilir.
- (iii) f ε -ölçülebilir.

Kanıt. Savı $f \geq 0$ için kanıtlamak yeterlidir. $f \geq 0$ olsun.

(i) $\iff$ (ii) denkliği Teorem 3.3.24'te kanıtlandı.

(ii) $\implies$ (iii): f ölçülebilir olsun ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $D_k := [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)$ ve $A_k := f^{-1}(D_k)$ olmak üzere $\mathbb{R}$ 'nin $\mathcal{D} = \{D_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ parçalanışı bize A 'nın $\mathcal{Z}_\varepsilon := \{A_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ parçalanışını verir. Her k için $\text{sl}(f, A_k) \leq \varepsilon$ olduğundan Teorem 3.3.36 (ii) sağlanır. Dolayısıyla f ε -ölçülebilir.

(iii) $\implies$ (i): $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Herhangi bir $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \geq 1}$ için $m_i := \inf f(A_i)$ ve $M_i := \sup f(A_i)$ olmak üzere $A_{\mathcal{Z}} := \bigsqcup_{k \geq 1} A_k \times [0, m_k]$ ve $A^{\mathcal{Z}} := \bigsqcup_{k \geq 1} A_i \times [0, M_k]$ olsun. $A_{\mathcal{Z}}, A^{\mathcal{Z}}$ kümeleri $\mathbb{R}^{n+1}$ 'de Lebesgue ölçülebilir.

$$A(f, \mathcal{Z}) := \lambda_{n+1}(A_{\mathcal{Z}}) = \sum_{i \geq 1} m_i \lambda_n(A_i)$$

ve

$$U(f, \mathcal{Z}) := \lambda_{n+1}(A^{\mathcal{Z}}) = \sum_{i \geq 1} M_i \lambda_n(A_i)$$

olsun. $A_{\mathcal{Z}} \subset [0, f) \subset A^{\mathcal{Z}}$ ve $\lambda_{n+1}(A^{\mathcal{Z}}) - \lambda_{n+1}(A_{\mathcal{Z}}) = \text{Sl}(f, \mathcal{Z})$ olur.

$$\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}' \text{ için } A_{\mathcal{Z}} \subset A_{\mathcal{Z}'} \subset [0, f) \subset A^{\mathcal{Z}'} \subset A^{\mathcal{Z}} \quad (3.41)$$

(3.41) ve f fonksiyonumuz ε -ölçülebilir olduğundan her $k \in \mathbb{N}^*$ için $\mathcal{Z}_k \in \mathfrak{Z}_A^<$ parçalanışlarını $\mathcal{Z}_1 \prec \mathcal{Z}_2 \prec \dots$ ve $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}_k) \leq 1/k$ olacak biçimde seçebilir.

Bu durumda $A_* := \bigcup_{k \geq 1} A^{Z_k}$ ve $A^* := \bigcap_{k \geq 1} A^{Z_k}$ kümeleri Lebesgue ölçülebilir, $A_* \subset [0, f) \subset A^*$ ve $\lambda_{n+1}(A_*) = \lambda_{n+1}(A^*)$ olur. Sonuçta $[0, f)$ grafaltı, Lebesgue ölçülebilir A_* kümesinden bir sıfır kümesi kadar fark ettiği için, Lebesgue ölçülebilir. Sonuçta f , λ -ölçülebilir, dolayısıyla ölçülebilir. ■

Sonuç 3.3.38 $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul ε -ölçülebilir olmasıdır.

Kanıt. $f = (f_1, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ olsun. f 'nin ölçülebilir (veya ε -ölçülebilir) olması her bir f_i 'nin ölçülebilir (veya ε -ölçülebilir) olmasına denktir; bu kolayca görülür. Savımız yukarıdaki teoremden çıkar. ■

3.3.4 Darboux ve Riemann Tipi Yaklaşımlar

Not. Bu altkısımda genelde izlenen yolu izleyeceğiz. Altkesim 3.3.1'deki hiçbir bilgiyi kullanmayacak ve orada kanıtlanan teoremleri yeniden kanıtlayacağız. “Ölçülebilir fonksiyon” ise altkısım 3.3.2'deki “ölçülebilir” anlamında kullanılacaktır! Riemann integralinde olduğu gibi Darboux yaklaşımı, üstü örtülü ölçüsel yaklaşımdır. ▲

Uzlaşma: Bu kısımda $A \subset \mathbb{R}^n$ daima bir Lebesgue ölçülebilir küme ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olacaktır. f 'nin $\pm\infty$ değerlerini almasına izin veriyoruz. A 'nın bir $\mathcal{Z}$ parçalanışından $A = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ olan bir $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{L}^n$ sayılabilir ayrık ailesi anlaşılacaktır. A 'nın sayılabilir parçalanışlarının kümesi $\mathfrak{Z}_A$ ile gösterilecektir. A da, f de sınırsız ve $\lambda_n(A) = +\infty$ olabilir.

A kümesinin $\mathcal{Z}$ parçalanışları, bunların $\mathfrak{Z}_A$ ailesi ve bu ailedeki $\prec$ sıralaması altkısım 3.3.3'teki gibi tanımlanırlar. Yine $\mathfrak{Z}_A^*$ ile ve onun $\prec$ sıralaması oradaki gibi olacaktır. Bu altkısımda $\mathcal{Z} = \{A_i\} \in \mathfrak{Z}_A$ ise bazı i 'ler için $\lambda_n(A_i) = +\infty$ olabilir! Bir $B \subset A$ için $\text{sl}(f, B)$ ve bir $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A$ için $\text{Sl}(f, \mathcal{Z})$ kavramı yine altkısım 3.3.3'teki gibi olacaktır.

$$m_i := m_{f, A_i} := \inf_{x \in A_i} f(x), \quad M_i := M_{f, A_i} := \sup_{x \in A_i} f(x) \text{ ve } \overline{M}_i := \sup_{x \in A_i} |f(x)|$$

olsun. Riemann integralinde olduğu gibi burada da $a_i \in A_i$ olmak üzere $(m_i \lambda_n(A_i))_{i \in I}$, $(M_i \lambda_n(A_i))_{i \in I}$ ve $(f(a_i) \lambda_n(A_i))_{i \in I}$ aileleri *toplanabilir olmak koşuluyla*

$$A(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i \in I} m_i \lambda_n(A_i), \quad U(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i \in I} M_i \lambda_n(A_i), \quad \text{ve} \quad (3.42)$$

$$R(f, \mathcal{Z}(a)) := \sum_{i \in I} f(a_i) \lambda_n(A_i) \quad (3.43)$$

olarak açıklanır. (3.42)'deki toplamlara sırasıyla f 'nin $\mathcal{Z}$ 'ye göre **alttoplama**, **üsttoplama** ve (3.43)'teki toplama f 'nin $\mathcal{Z}(a)$ 'ya göre **Lebesgue toplama** diyelim¹⁰. Daha önce belirttiğimiz gibi $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$ olacaktır. Ayrıca $A_i = \emptyset$ ise $\text{sl}(f, \emptyset)\lambda_n(\emptyset) = 0$ ve $f(a_i)\lambda_n(\emptyset) = m_i\lambda_n(\emptyset) = M_i\lambda_n(\emptyset) = 0$ alınacaktır.

Bu altkısımda da bir $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna, her $\varepsilon > 0$ için bir $\mathcal{Z}_\varepsilon \in \mathfrak{Z}_A$ parçalanışı $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) \leq \varepsilon$ olacak biçimde bulunabiliyorsa ε -**ölçülebilir** diyeceğiz. Karşılaşacağımız en basit ε -ölçülebilir $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları, $f(A)$ değer bölgesi sayılabilir olan fonksiyonlardır. Bunlara genelde **basit fonksiyonlar** denir. $i \neq j$ için $\alpha_i \neq \alpha_j$ olmak üzere $f(A) = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ ise $A_i := f^{-1}(\alpha_i)$ olmak üzere $f = \sum \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ olur. Bu özel durumda $m_i = M_i = f(a_i)$ olacağından, yukarıdaki üç toplam örtüşür ve söz konusu üç ailenin toplanabilir olması ise $\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i \lambda_n(A_i)$ serisinin *mutlak yakınsak olması* demektir. İleride, ε -ölçülebilir herhangi bir $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilir olmasının $|f|$ 'nin Lebesgue integrallenebilir olmasına denk olduğunu öğreneceğiz. Bu Riemann integrali için doğru değildir; bkz. Örnek 2.3.16 (ii). Bizi başka bir sürpriz beklemektedir.

Örnek 3.3.39. $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı olduğunda, A 'nın her $\mathcal{Z}$ parçalanışı için $A(f, \mathcal{A}), U(f, \mathcal{Z}), R(f, \mathcal{Z})$ toplamalarını sorunsuz oluşturabiliyorduk ve bunlar daima reel sayılardı. Şimdi $A := (0, 1]$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonumuz ise $f(x) = 1/\sqrt{x}$ olsun. $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I}$, A kümesinin Lebesgue ölçülebilir kümelerle sayılabilir bir parçalanışı olsun. Her sonlu I ve genellikle çoğu sonsuz I için $U_L(f, \mathcal{Z}) = \sum_{i \in I} \sup f(A_i) \cdot \lambda_1(A_i) = +\infty$ olur. Ancak her $i \in \mathbb{N}^*$ için

$$A_i := \left(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i} \right], \quad \mathcal{Z} := \{A_i\}_{i \geq 1} \quad \text{ve} \quad \sup f(A_i) = \sqrt{i+1} \quad \text{ile}$$

$$U_L(f, \mathcal{Z}) = \sum_{i \geq 1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{1+i} \right) \sqrt{1+i} = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i\sqrt{1+i}} \leq \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^{3/2}} < +\infty$$

olur. Tanım kümesi sınırlı bile olsa sınırsız fonksiyonlara izin verdiğimizde yeni durumlarla karşılaşyoruz; bu durum özel önlemleri zorunlu kılıyor. f 'nin Lebesgue integralinden söz edebilmemiz için en az bir $\mathcal{Z}$ parçalanışı için $U_L(f, \mathcal{Z})$ mutlak yakınsak olmalı, dd $U_L(|f|, \mathcal{Z}) < +\infty$ olmalıdır. Bu bir ön koşuldur. Diğer yandan Riemann integralinde elimizde bir ε -Ölçütümüz var. Lebesgue integrali Riemann integralini genişletecekse Lebesgue integrallenebilir her f fonksiyonu için, en azından her $\varepsilon > 0$ için bir sayılabilir $\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I}$, $A_i \in \mathcal{L}^n$ parçalanışı $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmelidir.

Örnek (3.3.39)'da gördüğümüz gibi $A(f, \mathcal{Z}), U(f, \mathcal{Z})$ ve $R(f, \mathcal{Z}(a))$ toplamalarının karakteri seçilen parçalanışa bağlıdır.

$$-\overline{M}_i \leq m_i \leq M_i \leq \overline{M}_i$$

olduğundan bir $\mathcal{Z}^*$ parçalanışı için $U(|f|, \mathcal{Z}^*) < +\infty$ ise her $\mathcal{Z}^* \prec \mathcal{Z}$ parçalanışı için $A(f, \mathcal{Z}), U(f, \mathcal{Z})$ ve $R(f, \mathcal{Z}(a))$ toplamalarının her üçü de mutlak yakınsaktırlar. Bu bizi aşağıdaki tanıma götürür.

¹⁰Kimi yazarlar Lebesgue toplamı yerine Riemann toplamı der.

Tanım 3.3.40 $A \in \mathcal{L}^n$ ve $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ olsun. Bir $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A$ parçalanışı için $U(|f|, \mathcal{Z}) < +\infty$ ise $\mathcal{Z}$ parçalanışı f -uygun ve f fonksiyonu A -uygundur diyelim. f fonksiyonu A -uygunsa, f -uygun parçalanışların kümesini $\mathfrak{Z}_f(A)$ veya karışıklığa yol açmayacaksa yalın olarak $\mathfrak{Z}_f$ ile göstereceğiz.

f -uygunluk özünde bir mutlak yakınsaklık koşuludur; bizi ilgilendiren üç toplamın mutlak yakınsaklığını garantiler. $\mathcal{Z}$ parçalanışı f -uygun, $A_i \in \mathcal{Z}$ ve $\lambda_n(A_i) = +\infty$ ise $f|_{A_i} \equiv 0$ olmak zorundadır. Ayrıca f -uygun bir $\mathcal{Z}$ parçalanışı varsa $f^{-1}(+\infty)$ ve $f^{-1}(-\infty)$ kümeleri sıfır kümeleri olmak zorundadırlar. Bu durumda bir sıfır kümesi dışında f fonksiyonun değerleri $\mathbb{R}$ 'de olmak zorundadır. Eğer $\lambda(A) < +\infty$ ise her sınırlı $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu her parçalanışa uygundur; bu durumda $\mathfrak{Z}_f = \mathfrak{Z}_A$.

$\mathcal{Z} = \{A_i\}_{i \in I}$ parçalanışı f -uygun olsun. Bu durumda $\bigsqcup_{i \in I} A_i \times [-\overline{M}_i, \overline{M}_i]$ kümesi ölçülebilir ve ölçüsü sonludur; ayrıca bu küme G_f ve $G_{|f|}$ graflarını içerir.

Lemma 3.3.41 $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu A -uygunsa aşağıdakiler geçerlidirler:

(i) $\{f = \pm\infty\} := \{x \in A \mid f(x) = \pm\infty\}$ bir sıfır kümesidir.

(ii) $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}' \in \mathfrak{Z}_f$ ve $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$ ise

$$-\infty < A(f, \mathcal{Z}) \leq A(f, \mathcal{Z}') \leq U(f, \mathcal{Z}') \leq U(f, \mathcal{Z}) < +\infty. \quad (3.44)$$

(iii) $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \in \mathfrak{Z}_f$ ve $\mathcal{Z}_1 \prec \mathcal{Z}_2$ ise $A(f, \mathcal{Z}_1) \leq U(f, \mathcal{Z}_2)$.

(iv) Her $\mathcal{Z} = \{A_i\} \in \mathfrak{Z}_f$ ve her $a_i \in A_i$ seçimleri için

$$A(f, \mathcal{Z}) \leq R(f, \mathcal{Z}(a)) \leq U(f, \mathcal{Z})$$

ve her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $a_i, b_i \in A_i$ noktaları

$$U(f, \mathcal{Z}) - R(f, \mathcal{Z}(a)) \leq \varepsilon \quad \text{ve} \quad R(f, \mathcal{Z}(b)) - A(f, \mathcal{Z}) \leq \varepsilon \quad (3.45)$$

olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. (i) Bir A_i^* için $\sup f(A_i^*) = \pm\infty$ ise $U(|f|, \mathcal{Z}^*) < +\infty$ 'dan dolayı $\lambda(A_i^*) = 0$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $\{f = \pm\infty\}$ kümesi sayılabilir çoklukta sıfır kümesinin birleşimi olarak bir sıfır kümesidir.

(ii) ve (iii) Riemann integralinden tanıdık ve apaçıktırlar.

(iv) $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin ve $\varepsilon_i > 0$ sayıları $\sum_{i \geq 1} \varepsilon_i = \varepsilon$ olacak biçimde seçilsinler. $\mathcal{Z}^* \prec \mathcal{Z}$ olduğundan $U(|f|, \mathcal{Z}) < +\infty$ olur. Dolayısıyla bir A_i için $\lambda(A_i) = +\infty$ ise $f|_{A_i} \equiv 0$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $\lambda(A_i) = +\infty$

veya $\lambda(A_i) = 0$ ise $U(f, \mathcal{Z})$ ifadesindeki $M_i \lambda_n(A_i)$ terimleri sıfır olur. $0 < \lambda(A_i) < +\infty$ olan her i için $a_i, b_i \in A_i$ noktalarını

$$M_i - f(a_i) < \frac{\varepsilon_i}{\lambda_n(A_i)} \quad \text{ve} \quad f(b_i) - m_i < \frac{\varepsilon_i}{\lambda_n(A_i)}$$

olacak biçimde seçebiliriz. Bu durumda

$$R(f, \mathcal{Z}(b)) - A(f, \mathcal{Z}) = \sum_{i \geq 1} (f(b_i) - m_i) \lambda_n(A_i) \leq \sum_{i \geq 1} \varepsilon_i = \varepsilon.$$

İkinci eşitsizlik benzer biçimde elde edilir. ■

Önsav 3.3.41 (ii)'den dolayı $(\mathfrak{Z}_f, \prec)$ yukarı doğru yönlendirilmiş bir kümedir: Gerçekten de $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \in \mathfrak{Z}_f$ ise $\mathcal{Z}_i \prec \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \in \mathfrak{Z}_f$. Bu yönlendirilmiş kümeye ilişkin bir $(x_{\mathcal{Z}})$ ağının limitini

$$\lim_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_f} x_{\mathcal{Z}} \quad \text{veya} \quad \lim_{f\mathcal{Z}} x_{\mathcal{Z}}$$

ile göstereceğiz. Hatırlatalım:

$$\lim_{f\mathcal{Z}} x_{\mathcal{Z}} = \alpha \iff \forall \epsilon > 0 \exists \mathcal{Z}_{\epsilon} \in \mathfrak{Z}_f \forall \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_f (\mathcal{Z} \succ \mathcal{Z}_{\epsilon} \implies |x_{\mathcal{Z}} - \alpha| < \epsilon). \quad (3.46)$$

Yine

$$\mathfrak{Z}_f(a) := \{\mathcal{Z}(a) | \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_f, a_i \in A_i\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{Z}(a) \prec \mathcal{Z}'(a') : \iff \mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'.$$

olarak açıklansın. Elbette $(\mathfrak{Z}_f(a), \prec)$ de yukarı doğru yönlendirilmiştir.

Tanım 3.3.42 $A \in \mathcal{L}^n$ ve $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu A -uygun olsun.

$$\underline{L}(f, A) := \sup \{A(f, \mathcal{Z}) | \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_f\} = \lim_{f\mathcal{Z}} A(f, \mathcal{Z}) \quad \text{\textit{Lebesgue altintegrali}}.$$

$$\overline{L}(f, A) := \inf \{U(f, \mathcal{Z}) | \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_f\} = \lim_{f\mathcal{Z}} U(f, \mathcal{Z}) \quad \text{\textit{Lebesgue üstintegrali}}.$$

Eğer $\lim_{f\mathcal{Z}} R(f, \mathcal{Z}(a))$ yakınsaksa f **Lebesgue integrallenebilir** denir ve

$$L(f, A) \equiv \int_A f d\lambda_n \equiv \int_A f := \lim_{f\mathcal{Z}(a)} R(f, \mathcal{Z}(a)) \text{ 'ye}$$

f 'nin **Lebesgue integrali** denir. Son olarak,

$$\mathcal{L}(A) := \{f | f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ Lebesgue integrallenebilir}\}$$

şeklinde tanımlayacağız.

Her ne kadar f fonksiyonumuz $\pm\infty$ değerlerini alabilirse de f bir A -uygun fonksiyon olduğundan, $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_f$ olmak üzere $A(f, \mathcal{Z})$ üstten, $U(f, \mathcal{Z})$ ise alttan sınırlı olduğundan $\underline{L}(f, A), \overline{L}(f, A) \in \mathbb{R}$, $\underline{L}(f, A) \leq \overline{L}(f, A)$ ve $\overline{L}(f, A) = -\underline{L}(-f, A)$. Ayrıca (3.44)'ten $(A(f, \mathcal{Z}))_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_f}$ artan ve $(U(f, \mathcal{Z}))_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_f}$ azalan olduğundan, tanımdaki limitler vardır. Diğer yandan daima $L(f, A) \in \mathbb{R}$.

Önerme 3.3.43 A ölçülebilir ve $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ise aşağıdaki önermeler geçerlidir:

- (i) $f \in \mathcal{L}(A)$ ve $L(f, A) = \alpha \iff \underline{L}(f, A) = \overline{L}(f, A) = \alpha$,
- (ii) **ε -Ölçütü:** $f \in \mathcal{L}(A) \iff f, A$ -uygundur ve her $\varepsilon > 0$ için bir $\mathcal{Z}_\varepsilon \in \mathfrak{Z}_f$ ile $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon$ sağlanır,
- (iii) $f \in \mathcal{L}(A)$, $g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ve A 'da hhy $g = f$ ise $g \in \mathcal{L}(A)$ ve $L(f, A) = L(g, A)$,¹¹
- (iv) **Monotonluk:** $f, g \in \mathcal{L}(A)$ ve A 'da hhy $f \leq g$ ise $L(f, A) \leq L(g, A)$. Monotonluk $\underline{L}$ ve $\overline{L}$ için de geçerlidir.

Kanıt. Tüm bu savlar Riemann integralindeki benzerleri gibi kanıtlanır.

(i) Doğrudan Önsav 3.3.41 (iii), (iv)'ten çıkar. (ii)'nin kanıtı Önerme (2.3.6)'nın kanıtının aynısıdır.

(iii) Koşulumuzdan $S := \{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}$ bir sıfır kümesidir; dolayısıyla $\mathfrak{Z}_f = \mathfrak{Z}_g$. Şimdi $\mathcal{S} := \{S, A \setminus S\} \in \mathfrak{Z}_A$ olsun. Bir $\mathcal{Z}^* \in \mathfrak{Z}_f$ keyfi verilsin. Gerekirse $\mathcal{Z}^*$ 'dan $\mathcal{SZ}^*$ 'a geçerek daha baştan $\mathcal{S} \prec \mathcal{Z}^*$ varsayabiliriz. Şimdi $\mathcal{Z}^* \prec \mathcal{Z} = \{A_i\} \in \mathfrak{Z}_A$ keyfi verilsin. $A_i \subset S$ ise a_i nasıl seçilirse seçilsin $f(a_i)\lambda(A_i) = g(a_i)\lambda(A_i) = 0$ olur. Eğer $A_i \subset A \setminus S$ ise bu kez daima $f(a_i)\lambda(A_i) = g(a_i)\lambda(A_i)$ olur. Sonuçta daima $R(f, \mathcal{Z}(a)) = R(g, \mathcal{Z}(a))$ ve bu (3.46) ile savı verir.

(iv) $S := \{x \in A \mid f(x) > g(x)\}$ bir sıfır kümesidir. $\tilde{f} : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $A \setminus S$ 'de f olsun ve S 'deki değerleri ise $\tilde{f}(x) \leq g(x)$ olacak biçimde istenildiği gibi açıklansın. Açıkça $\mathfrak{Z}_f = \mathfrak{Z}_{\tilde{f}} = \mathfrak{Z}_g$. (iii)'ten dolayı

$$L(f, A) = L(\tilde{f}, A) = \lim_{f\mathcal{Z}} R(\tilde{f}, \mathcal{Z}(a)) \leq \lim_{f\mathcal{Z}} R(g, \mathcal{Z}(a)) = L(g, A).$$

■

Uzlaşma: Şimdi $f, g \in \mathcal{L}(A)$ olsun. Bir $x \in A$ için $f(x) = -g(x) \in \{\pm\infty\}$ ise $f(x) + g(x)$ tanımsızdır. Bu tipten x noktalarının kümesine T dersek Önsav 3.3.41 (i)'den dolayı T bir sıfır kümesidir. Dolayısıyla f ve g 'nin T 'deki değerlerini istediğimiz sonlu sayılarla değiştirebiliriz, örneğin daima

¹¹ Anımsatalım, " A 'da hhy $f = g$ " şu anlama gelmektedir: $S := \{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}$ bir sıfır kümesidir.

0 alabiliriz, elde edilen fonksiyonlar yine $\mathcal{L}(A)$ 'dadırlar ve Önerme 3.3.43 (iii)'ten dolayı integralleri değişmez. Hatta $S := \{f = \pm\infty\} \cup \{g = \pm\infty\}$ sıfır kümesinde fonksiyonlarımıza istediğimiz sonlu değerleri verebiliriz. Özetle: $f + g$ 'yi oluşturduğumuzda daima $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ varsayabiliriz. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f \in \mathcal{L}(A)$ olduğu apaçıktır.

Bu uzlaşmalarla aşağıdaki önerme geçerlidir.

Önerme 3.3.44 $A \in \mathcal{L}^n$ ise

- (i) $\mathcal{L}(A)$ bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayı ve $L : \mathcal{L}(A) \rightarrow \mathbb{R}$ bir doğrusal dönüşümdür.
- (ii) $f \in \mathcal{L}(A)$, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz sürekli ve $\varphi(0) = 0$ ise $\varphi \circ f \in \mathcal{L}(A)$; özellikle $|f|, f^+, f^- \in \mathcal{L}(A)$. Bunun bir sonucu olarak herhangi bir $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f \in \mathcal{L}(A) \iff f^+, f^- \in \mathcal{L}(A) \text{ ve } f \in \mathcal{L}(A) \text{ ise } \int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-. \quad (3.47)$$

Kanıt. (i) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{L}(A)$ ve $S := \{f = \pm\infty\} \cup \{g = \pm\infty\}$ ve $\mathcal{S} = \{S, A \setminus S\}$ olsun. f, g fonksiyonları $\mathcal{Z}^*$ -uygun olsunlar; yukarıda yaptığımız gibi $\mathcal{S} \prec \mathcal{Z}^*$ varsayabiliriz. Bu durumda her $\mathcal{Z}^* \prec \mathcal{Z}(a) = \{A_i, a_i\} \in \mathfrak{Z}_A$ için $A_i \subset S$ ise $f(a_i)\lambda(A_i) = 0 = g(a_i)\lambda(A_i)$ olur. $A_i \subset A \setminus S$ ise

$$(\alpha f + \beta g)(a_i)\lambda(A_i) = \alpha f(a_i)\lambda(A_i) + \beta g(a_i)\lambda(A_i)$$

bağıntısı $\mathbb{R}$ 'de geçerlidir. $R(f, \mathcal{Z}(a))$ ve $R(g, \mathcal{Z}(a))$ mutlak yakınsak olduklarından

$$R(\alpha f + \beta g, \mathcal{Z}(a)) = \alpha R(f, \mathcal{Z}(a)) + \beta R(g, \mathcal{Z}(a)).$$

Burada $\mathcal{Z}(a)$ üzerinden limite geçerse savımızı kazanırız.

(ii) Önsav 3.3.41 (i)'den dolayı $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ varsayabiliriz. Koşullarımızdan bir $\alpha > 0$ ile her $s, t \in \mathbb{R}$ için $|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq \alpha |s - t|$. Özellikle, $\varphi(0) = 0$ olduğundan, her s için $|\varphi(s)| \leq \alpha |s|$. Açıkça $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_f$ ise

$$U(|\varphi \circ f|, \mathcal{Z}) \leq \alpha U(|f|, \mathcal{Z}) < +\infty.$$

Dolayısıyla $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_{\varphi \circ f}$. Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Önerme 3.3.43 (ii)'den dolayı bir $\mathcal{Z}_\varepsilon = \{A_i\} \in \mathfrak{Z}_f$ parçalanışı $\text{Sl}(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon/\alpha$ olacak biçimde bulunabilir.

$$\text{sl}(\varphi \circ f, A_i) \leq \alpha \text{sl}(f, A_i) \text{ olduğundan } \text{Sl}(\varphi \circ f, \mathcal{Z}_\varepsilon) \leq \alpha \text{Sl}(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Dolayısıyla Önerme 3.3.43 (ii) ile $\varphi \circ f \in \mathcal{L}(A)$. Özel olarak $\varphi(s) = |s|, s^+, s^-$ alırsak $\varphi \circ f = |f|, f^+, f^-$ olur. Savın kalanı (i)'den çıkar. ■

A Jordan ölçülebilir ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı ise $\mathfrak{Z}(A) \subset \mathfrak{Z}_A$ olduğundan

$$\int_{\underline{A}} f \leq \underline{L}(f, A) \leq \overline{L}(f, A) \leq \overline{\int}_A f.$$

Sonuç 3.3.45 $f \in \mathcal{R}(A)$ ise $f \in \mathcal{L}(A)$ ve f 'nin Riemann ve Lebesgue integrallerinin değerleri aynıdır.

Öyleyse her iki tür integral için $\int_A f$ gösteriminin sakıncası yoktur. Önerme 3.3.44 (ii)'den dolayı yalnızca $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ tipinde fonksiyonları incelemek yeterlidir. Bu tip fonksiyonları incelemek daha kolaydır. $\overline{\mathbb{R}}_+$ 'da her monoton artan dizi yakınsaktır; üstten sınırlı ise bir α sayısına, aksi durumda $+\infty$ 'a yakınsar. Bunun sonucu olarak $\overline{\mathbb{R}}_+$ 'da her $\sum_i a_i$ serisi ya bir α gerçel sayısına ya da $+\infty$ 'a yakınsaktır.

Uyarı. Özdeş integrallerde durum farklıdır. $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $(0, a)$, $(a > 0)$ aralığında Riemann integrallenebilir olsun. f fonksiyonu $(0, +\infty)$ 'da özdeş integrallenebilirken f fonksiyonu $(0, +\infty)$ 'da Lebesgue integrallenemeyebilir. Örneğin $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ için

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

ancak

$$\int_{(0, +\infty)} \left| \frac{\sin x}{x} \right| d\lambda_1 = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \left| \frac{\sin x}{x} \right| d\lambda_1 = +\infty.$$

Dolayısıyla $|f| \notin \mathcal{L}((0, +\infty))$ öyleyse $f \notin \mathcal{L}((0, +\infty))$.

Not 3.3.46 (1) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f \equiv 0$ olsun. f fonksiyonu Riemann integrallenebilir, dolayısıyla Lebesgue integrallenebilir. Her $x \in [0, 1]$ için $x \in \mathbb{Q}$ ise $g(x) = 1$, $x \notin \mathbb{Q}$ ise $g(x) = 0$ olsun. $[a, b]$ aralığında hhy $f(x) = g(x)$ olduğu için g de Lebesgue integrallenebilir. Ancak g fonksiyonu $[a, b]$ de Riemann integrallenemez. Dolayısıyla $\mathcal{R}([a, b]) \subsetneq \mathcal{L}([a, b])$.

(2) $f \in \mathcal{R}(A)$ ise Sonuç 2.3.18 (ii)'den $f^2 \in \mathcal{R}(A)$. Bu Lebesgue integrali için doğru değildir. Örneğin $A = (0, 1]$ ve $f(x) = 1/\sqrt{x}$ ise $f \in \mathcal{L}(A)$ ancak $f^2 \notin \mathcal{L}(A)$! ▲

$f = (f_1, \dots, f_m) : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^m$ fonksiyonu verilsin. $i = 1, \dots, m$ için her bir f_i fonksiyonu A -uygun ise f fonksiyonu A -uygundur diyelim. $\mathcal{Z}_i$ parçalanışları f_i uygunsa $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_1 \cdots \mathcal{Z}_m$ parçalanışı f -uygundur. $\mathfrak{Z}_f$ yine f -uygun parçalanışların ailesini gösterebilir. $\lim_{f \in \mathcal{Z}} R(f, \mathcal{Z}(a))$ varsa f fonksiyonu Lebesgue integrallenebilir diyelim.

$$\exists \lim_{f \in \mathcal{Z}} R(f, \mathcal{Z}(a)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \iff \exists \lim_{f_i \in \mathcal{Z}_i} R(f_i, \mathcal{Z}_i(a)) = \alpha_i, i = 1, \dots, m.$$

Dolayısıyla f 'nin Lebesgue integrallenebilir olması her bir f_i 'nin Lebesgue integrallenebilir olmasına denktir ve bu durumda

$$\int_A f \equiv \int_A (f_1, \dots, f_m) = \left(\int_A f_1, \dots, \int_A f_m \right).$$

3.3.5 Pozitif Değerli Fonksiyonlar

Önerme 3.3.44 (ii)'den dolayı $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun integrallenebilirliği $f^\pm : A \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonlarının integrallenebilirliğine denktir. Bu nedenle bu alt kısımda $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ tipinde fonksiyonları inceleyeceğiz. Bunlar içins

$$f \in \mathcal{L}(A) \text{ ve } \int_A f = \alpha \iff \underline{L}(f, A) = \overline{L}(f, A) = \alpha < +\infty \quad (3.48)$$

olduğu apaçıktır.

$\mathbb{R}_+$ 'da verilen her sayılabilir $\{a_i\}_{i \in I}$ ailesi toplanabilir; ancak burada toplamın $+\infty$ olmasına izin veriyoruz. Paketleme Teoremi geçerlidir.

Şimdi $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ olsun. Bu durumda her $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(A)$ için, $+\infty$ değerini almalarına izin verilmek koşuluyla, $A(f, \mathcal{Z})$, $U(f, \mathcal{Z})$ toplamaları daima tanımlıdır. $\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$ olmak koşuluyla yine $A(f, \mathcal{Z}) \leq A(f, \mathcal{Z}') \leq U(f, \mathcal{Z}') \leq U(f, \mathcal{Z})$ geçerlidir. $\overline{L}(f, A) < +\infty$ ise $U(f, \mathcal{Z}^*) = U(|f|, \mathcal{Z}^*) < +\infty$ olan $\mathcal{Z}^*$ parçalanışları vardır, dd bu durumda f A -uygundur.

Uzlaşma: $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu A -uygun olsun olmasın $\underline{L}(f, A) = \overline{L}(f, A) = \alpha$ ise, $\alpha = +\infty$ olsa bile, $\int_A f = \alpha$ yazacağız. Ancak $0 \leq \alpha < +\infty$ ise f integrallenebilir diyeceğiz. Herhangi bir $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ için $\int_A f^+$, $\int_A f^-$ integrallerinin her ikisi birden $+\infty$ değilse yine

$$\int_A f := \int_A f^+ - \int_A f^-$$

olarak tanımlayacağız ; yine ancak $\int_A f \in \mathbb{R}$ ise f , A 'da integrallenebilir diyeceğiz.

Lemma 3.3.47 (i) $A, B \in \mathcal{L}^n$, $A \subset B$ ve $0 \leq p < +\infty$ olsun. $\int_B p \cdot \mathbf{1}_A = p\lambda_n(A)$. Özellikle $\lambda_n(A) < +\infty$ ise $\mathbf{1}_A \in \mathcal{L}(B)$ ve $\int_B \mathbf{1}_A = \lambda_n(A)$.

(ii) $f \in \mathcal{L}(A)$, $f \geq 0$ ve $\int_A f = 0$ ise A 'da hhy $f = 0$.

Kanıt. (i) B 'nin $\mathcal{Z}_* := \{A, B \setminus A\}$ parçalanışı $p\mathbf{1}_A$ -uygundur ve her $\mathcal{Z} \succ \mathcal{Z}_*$ parçalanışı için $p\lambda_n(A) = A(p\mathbf{1}_A, \mathcal{Z}_*) = A(p\mathbf{1}_A, \mathcal{Z}) = U(p\mathbf{1}_A, \mathcal{Z}) = U(p\mathbf{1}_A, \mathcal{Z}_*) = p\lambda_n(A)$ olduğundan $p\mathbf{1}_A \in \mathcal{L}(B)$ ve $\int_B p\mathbf{1}_A = p\lambda_n(A)$. Özellikle $\int_B \mathbf{1}_A = \lambda_n(A)$.

(ii) $\alpha > 0$ için $A_\alpha := \{x \in A \mid f(x) \geq \alpha\}$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Bu durumda bir $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_f$ parçalanışı $U(f, \mathcal{Z}) < \varepsilon$ olacak biçimde vardır. Her $A_i \in \mathcal{Z}$ için M_i bildik biçimde açıklanmış olsun. $B_\alpha := \bigcup \{A_i \in \mathcal{Z} \mid M_i \geq \alpha\}$ olsun. Bu durumda $A_\alpha \subset B_\alpha$ ve

$$\alpha\lambda_n(A_\alpha) \leq \alpha\lambda_n(B_\alpha) \leq U(f, \mathcal{Z}) < \varepsilon$$

olur. Buradan, $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\lambda_n(A_\alpha) = 0$ olur. $P := \{x \in A \mid f(x) > 0\}$ dersek $P = \bigcup_{k \geq 1} A_{1/k}$ olduğundan $\lambda_n(P) = 0$ olur. ■

Teorem 3.3.48 $A \in \mathcal{L}^n$, $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ herhangi bir fonksiyon ve $\mathcal{Z}^* = \{B_i\}$ ise A 'nın ölçülebilir B_i kümelerine sayılabilir bir parçalanışı olsun. Bu durumda

$$\underline{L}(f, A) = \sum_i \underline{L}(f, B_i) \text{ ve } \overline{L}(f, A) = \sum_i \overline{L}(f, B_i).$$

Kanıt. $\mathcal{Z}_i \in \mathfrak{Z}_{B_i}$ ise $\mathcal{Z} := \bigcup_i \mathcal{Z}_i \in \mathfrak{Z}_A$. Tersine A 'nın bir $\mathcal{Z} = \{A_j\}$ parçalanışı verilmiş ve $\mathcal{Z}^* \prec \mathcal{Z}$ ise $\mathcal{Z}_i := \{A_j \mid A_j \subset B_i\}$ olmak üzere $\mathcal{Z}_i \in \mathfrak{Z}_{B_i}$ ve $\mathcal{Z} := \bigcup_i \mathcal{Z}_i \in \mathfrak{Z}_A$. Buradan, f 'nin değerlerini $[0, +\infty]$ 'da aldığını da gözetirsek, paketleme teoreminden

$$A(f, \mathcal{Z}) = \sum_i A(f|B_i, \mathcal{Z}_i) \text{ ve } U(f, \mathcal{Z}) = \sum_i U(f|B_i, \mathcal{Z}_i) \quad (3.49)$$

elde ederiz. Savımızı altintegraller için kanıtlayacağız; üstintegraller için benzer biçimde kanıtlanır. Her $\mathcal{Z}^* \prec \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A$ için (3.49) eşitliklerinden $A(f, \mathcal{Z}) \leq \sum_i \underline{L}(f, B_i)$ ve bunun ardından $\underline{L}(f, A) \leq \sum_i \underline{L}(f, B_i)$ elde ederiz. Diğer yandan her $m \in \mathbb{N}^*$ için yine (3.49)'dan

$$\underline{L}(f, A) \geq A(f|B_1, \mathcal{Z}_1) + \cdots + A(f|B_m, \mathcal{Z}_m)$$

elde ederiz. Bu eşitsizlik keyfi $\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_m$ 'ler için geçerli olduğundan bize

$$\underline{L}(f, A) \geq \underline{L}(f, B_1) + \cdots + \underline{L}(f, B_m)$$

eşitsizliğini verir. $m \in \mathbb{N}^*$ keyfi olduğundan $\underline{L}(f, A) \geq \sum_i \underline{L}(f, B_i)$ elde ederiz. Sonuçta $\underline{L}(f, A) = \sum_i \underline{L}(f, B_i)$ olur. ■

Sonuç 3.3.49 $A \in \mathcal{L}^n$, $\mathcal{Z} = \{A_i\} \in \mathfrak{Z}_A$ ve $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ olsun. $f \in \mathcal{L}(A)$ olması için gvyk her i için $f \in \mathcal{L}(A_i)$ ve $\sum_i \int_{A_i} |f| < +\infty$ olmasıdır. Bu sağlanmışsa

$$\int_A f = \sum_i \int_{A_i} f. \quad (3.50)$$

Kanıt. f^+ 'nın A ve A_i 'deki altintegrallerini α, α_i ve üstintegrallerini ise β, β_i ile gösterelim. $f \in \mathcal{L}(A)$ ise Önerme 3.3.44 (ii)'den $f^+ \in \mathcal{L}(A)$, dolayısıyla $\alpha = \beta < +\infty$. Teorem 3.3.48'den dolayı ise $\sum_i \alpha_i = \alpha = \beta = \sum_i \beta_i$. Bu eşitlik ve $\alpha_i \leq \beta_i$ 'den her i için $\alpha_i = \beta_i < +\infty$, dolayısıyla $f^+ \in \mathcal{L}(A_i)$ olur.

Tersine her i için $\alpha_i = \beta_i$ ve $\sum_i \alpha_i < +\infty$ ise $\alpha = \beta < +\infty$, dolayısıyla $f^+ \in \mathcal{L}(A)$ olur. Benzeri f^- için geçerlidir. Bu (3.48) ile savı verir. ■

Sonuç 3.3.49'un bir sonucu ise her ölçülebilir $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ için

$$\lambda_f : \mathcal{L}^n \rightarrow [0, +\infty], \quad \lambda_f(A) := \int_A f, \quad A \in \mathcal{L}^n$$

ile tanımlanan λ_f 'nin bir ölçü olduğudur.

Şimdi $A, B \in \mathcal{L}^n$, $B \subset A$ ve $f : B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ olsun. f_A bilindiği gibi f 'yi $A \setminus B$ 'ye $\equiv 0$ olarak genişleten fonksiyondur. Bu durumda $\int_{A \setminus B} f_A = 0$ ve $\{B, A \setminus B\}$ ise A 'nın bir parçalanışıdır. Dolayısıyla Sonuç 3.3.49'dan

$$f \in \mathcal{L}(B) \iff f_A \in \mathcal{L}(A) \text{ ve } f \in \mathcal{L}(B) \text{ ise } \int_B f = \int_A f_A. \quad (3.51)$$

Lemma 3.3.50 $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ ölçülebilirse $\underline{L}(f, A) = \overline{L}(f, A)$. Ayrıca $\underline{L}(f, A) < +\infty$ ise $f \in \mathcal{L}(A)$.

Kanıt. $\underline{L}(f, A) = +\infty$ ise sav aşıkâr. Şimdi $\underline{L}(f, A) < +\infty$ olsun. Önce $\lambda_n(A) < +\infty$ durumunu ele alalım. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\varepsilon' > 0$ sayısını $\varepsilon' \lambda_n(A) < \varepsilon$ olacak biçimde seçelim. Her $k \in \mathbb{N}$ için $B_k := [k\varepsilon', (k+1)\varepsilon')$ olmak üzere $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{+\infty\}$ ailesi $[0, +\infty]$ 'un ölçülebilir kümelerine bir parçalanışıdır. f fonksiyonu ölçülebilir olduğundan, $A_k := f^{-1}(B_k)$ ve $S := f^{-1}(+\infty)$ olmak üzere $\mathcal{Z}_{\varepsilon'} := \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{S\} \in \mathfrak{Z}_A$. Ayrıca f 'nin A_k 'deki infimum ve supremumları için $k\varepsilon' \leq m_i \leq M_i \leq (k+1)\varepsilon'$ geçerlidir. $\inf f(S) = +\infty$, diğer yandan koşulumuzdan $\underline{L}(f, A) < +\infty$; dolayısıyla $\lambda_n(S) = 0$ olmak zorundadır. Sonuçta

$$U(f, \mathcal{Z}_{\varepsilon'}) = \sum_k M_k \lambda_n(A_k) \leq \sum_k (m_k + \varepsilon') \lambda_n(A_k) \leq A(f, \mathcal{Z}_{\varepsilon'}) + \varepsilon' \lambda_n(A).$$

Dolayısıyla $Sl(f, \mathcal{Z}_{\varepsilon}) \leq \varepsilon' \lambda_n(A) < \varepsilon$. Önerme 3.3.43 ε -Ölçütünden $f \in \mathcal{L}(A)$.

Şimdi $\lambda_n(A) = +\infty$ olsun. A 'yı ölçüleri sonlu olan, sayılabilir çoklukta ölçülebilir $C_i, i \in I$ kümelerine parçalayalım. $f|_{C_i}$ ölçülebilir ve yukarıda kanıtlanandan ise $f|_{C_i} \in \mathcal{L}(C_i)$. Savın kalanı Teorem 3.3.48'den çıkar. ■

Teorem 3.3.51 (Ölçülebilirlik-İntegrallenebilirlik) $A \in \mathcal{L}^n$ ve $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ olsun. $f \in \mathcal{L}(A)$ olması için gvyk f 'nin ölçülebilir ve $\underline{L}(|f|, A) < +\infty$ olmasıdır. Eğer f ölçülebilir ve bir $g \in \mathcal{L}(B)$ ile $|f| \leq g$ ise $f \in \mathcal{L}(A)$.

Kanıt. (1) $f \in \mathcal{L}(A)$ olsun. Bir $\mathcal{Z}^* \in \mathfrak{Z}_A$ parçalanışı $U(|f|, \mathcal{Z}^*) < +\infty$ olacak biçimde vardır. A 'nın her $\mathcal{Z} = \{A_i\} \succ \mathcal{Z}^*$ parçalanışına, $m_i = \inf f(A_i)$ ve $M_i = \sup f(A_i)$ olmak üzere, $\varphi := \sum m_i \mathbf{1}_{A_i}$ ve $\Phi := \sum M_i \mathbf{1}_{A_i}$ basit

fonksiyonlarını karşılık getirelim. φ, Φ fonksiyonları ölçülebilir ve $A(f, \mathcal{Z}) = A(\varphi, \mathcal{Z})$, $U(f, \mathcal{Z}) = U(\Phi, \mathcal{Z})$. Şimdi her $k \in \mathbb{N}^*$ için, Önerme 3.3.43 ε -Ölçütünden, $\mathcal{Z}_k$ parçalanışlarını $\mathcal{Z}^* \prec \mathcal{Z}_1 \prec \mathcal{Z}_2 \prec \dots$ ve $Sl(f, \mathcal{Z}_k) < 1/k$ olacak biçimde seçebiliriz. $\mathcal{Z}_k$ parçalanışına ilişkin φ_k, Φ_k fonksiyonlarını yukarıdaki gibi oluşturalım. Bunlar ölçülebilir fonksiyonlardır; (φ_k) bir monoton artan dizi iken (Φ_k) bir monoton azalan dizidir. Bunların limitleri olan φ ve Φ fonksiyonları da ölçülebilir ve $\varphi \leq f \leq \Phi$ geçerlidir.

$$A(f, \mathcal{Z}_k) = A(\varphi_k, \mathcal{Z}_k) \leq A(\varphi, \mathcal{Z}_k) \leq A(\Phi, \mathcal{Z}_k) \leq U(\Phi_k, \mathcal{Z}_k) = U(f, \mathcal{Z}_k)$$

bağıntılarından $\varphi, \Phi \in \mathcal{L}(A)$ ve $\int_A f = \int_A \varphi = \int_A \Phi$ elde edilir. $0 \leq \Phi - \varphi \in \mathcal{L}(A)$ ve $\int_A (\Phi - \varphi) = 0$ olduğundan Önsav 3.3.47 (ii)'den A 'da hhy $\Phi - \varphi = 0$, dolayısıyla A 'da hhy $f = \varphi$. Önsav 3.3.16 (iii)'ten f ölçülebilir.

Tersine, eğer f ölçülebilirse f^+ ve f^- de ölçülebilirdir; hatta $\underline{L}(f^\pm, A) \leq \underline{L}(|f|, A) < +\infty$ olduğundan, yukarıdaki önsavdan, integrallenebilirler. Dolayısıyla $f = f^+ - f^-$ integrallenebilir. ■

Bu teoremle ölçülebilir fonksiyonlar ve integrallenebilir fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi netleştirmiş olduk.

Not 3.3.52 Önerme 3.3.21 ve Teorem 3.3.51'in kanıtı Lebesgue integralini açıklamamın bir başka yolunu verirler. $A \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir olsun. $f \geq 0$ olsun; salt bu durumu incelemenin yeterli olduğunu biliyoruz. Her $\varphi = \sum a_i 1_{A_i} \in \mathcal{M}_{sl}(A)$ için (bkz. 3.3.12) için $\int_A \varphi = \sum a_i \lambda_n(A_i)$ olarak açıklanır. Monoton artan $(\varphi_k) \subset \mathcal{M}_{sl}(A)$ dizileri $\varphi_k \uparrow f$ olacak biçimde vardır. $(\int_A \varphi_k)$ dizisi $[0, +\infty]$ 'da yakınsaktır ve bu limit (φ_k) dizisinin seçiminden bağımsızdır; bu kanıtlanır. $\int_A f := \lim \int_A \varphi_k$ olarak açıklanır. $\int_A f < +\infty$ ise f fonksiyonu Lebesgue integrallenebilir denir. ▲

Önerme 3.3.53 $A \in \mathcal{L}^n$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ Lebesgue integrallenebilir ve $\|\cdot\|$ ise $\mathbb{R}^p$ 'de herhangi bir norm ise

$$\left\| \int_A f \right\| \leq \int_A \|f\|.$$

Kanıt. $f = (f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{L}(A)$ olduğundan her i için $|f_i| \in \mathcal{L}(A)$; dolayısıyla $|f_1| + \dots + |f_p| \in \mathcal{L}(A)$. Ayrıca $\mathbb{R}^p$ 'de herhangi iki norm denk olduğundan bir $C > 0$ ile $\|f\| \leq C(|f_1| + \dots + |f_p|)$ olur. Teorem 3.3.51 ile $\|f\| \in \mathcal{L}(A)$. Herhangi bir $\mathcal{Z}(a) \in \mathfrak{Z}_A$ parçalanışı için $\|R(f, \mathcal{Z}(a))\| \leq R(\|f\|, \mathcal{Z}(a))$ geçerlidir; bu, limitin monotonluğuyla birlikte, savı verir. ■

3.3.6 Yakınsaklık Teoremleri

Uzlaşma: Bu altkısımda $A \subset \mathbb{R}^n$ daima bir ölçülebilir küme olacaktır.

$f_k, f \in \mathcal{L}(A)$ ve $f = \lim f_k$ ise hangi koşullarda $\int_A f \equiv \int_A \lim f_k = \lim \int_A f_k$ olduğunu araştıracağız. Riemann integraline göre daha iyi durumdayız; ancak koşulsuz olmayacağını örnekleyelim.

Örnek 3.3.54. Her $\varepsilon > 0$ için, $I_\varepsilon := [-\varepsilon, \varepsilon]$ olmak üzere $f_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu $f_\varepsilon := \frac{1}{2\varepsilon} \cdot 1_{I_\varepsilon}$ olarak açıklansın.

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} f_\varepsilon(x) =: f_0(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0, \\ +\infty & , x = 0. \end{cases}$$

Bu durumda $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f_0$. Veya her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $1_{[n, n+1]}$ olsun. $g_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} g_n = 1$, $\lim g_n =: g \equiv 0$ ve $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ve yine $\lim \int_{\mathbb{R}} g_n \neq \int_{\mathbb{R}} \lim g_n$.

Teorem 3.3.55 (B. Levi) Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : A \rightarrow [0, +\infty]$ bir ölçülebilir fonksiyon, (f_k) bir monoton artan dizi ve her $x \in A$ için $f(x) := \lim_k f_k(x)$ olsun. Bu koşullarda

$$\int_A f \equiv \int_A \lim_k f_k = \lim \int_A f_k.$$

Sağdaki limit sonlu ise $f \in \mathcal{L}(A)$.¹²

Kanıt. Önerme 3.3.20(iii)'ten dolayı f ölçülebilir. f ve f_k 'nin A 'daki integrallerini sırasıyla I ve I_k ile gösterelim. $f_k \leq f$ olduğundan $I_k \leq I$, dolayısıyla $\alpha := \lim_k I_k \leq I$ olur. $I \leq \alpha$ olduğunu gösterirsek işimiz biter. $\alpha = +\infty$ ise elbette $I \leq \alpha$. Şimdi $\alpha < +\infty$ durumunu inceleyelim. Önce bir arasav kanıtlayacağız: $B \subset A$ ve $0 \leq m \leq +\infty$ olsun.

$$(*) \text{ Her } x \in B \text{ için } m \leq f(x) \text{ ise } m\lambda(B) \leq \lim_k \int_B f_k =: \alpha(B).$$

(*) savını kanıtlayalım. $m = 0$ ise sav aşıkardır. Şimdi $m > 0$ ve $0 < c < m$ olsun. $B_k^c := \{f_k > c\} \cap B$ kümesi ölçülebilir ve

$$c\lambda(B_k^c) \leq \int_{B_k^c} f_k \leq \alpha(B).$$

Buradan, $B_k^c \uparrow B$ olduğundan, $c\lambda(B) \leq \alpha(B)$ elde edilir. Bu eşitsizlikten $c \nearrow m$ ile $m\lambda(B) \leq \alpha(B)$ elde edilir; arasav kanıtlanmıştır. Şimdi bir $\mathcal{Z} = \{A_i\} \in \mathfrak{Z}_A$ parçalanışı verilsin ve $A(f, \mathcal{Z}) = \sum_i m_i \lambda(A_i)$ olsun. (*) arasavını $A_1, \dots, A_p$ 'lere uygular ve $B_p := A_1 \sqcup \dots \sqcup A_p$ alırsak

$$\sum_{i=1}^p m_i \lambda(A_i) \leq \sum_{i=1}^p \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{A_i} f_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_p} f_k \leq \alpha.$$

¹²Bazı x 'ler için $f(x) = +\infty$ olabilir. Yine $\int_A f = +\infty$ olabilir; o zaman $f \notin \mathcal{L}(A)$.

Buradan $p \rightarrow +\infty$ limitine geçerse $A(f, \mathcal{Z}) \leq \alpha$ olur. $\mathcal{Z}$ parçalamışı keyfi olduğundan $I \leq \alpha$ elde ederiz; bu $\alpha \leq I$ ile birlikte $I = \alpha$ eşitliğini verir. ■

Sonuç 3.3.56 (i) Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : A \rightarrow [0, +\infty]$ ölçülebilir ve $f := \sum f_k$ ise f ölçülebilir ve

$$\int_A f \equiv \int_A \left(\sum_k f_k \right) = \sum_k \int_A f_k.$$

(ii) $(f_k) \subset \mathcal{L}(A)$ dizisi monoton ve $\{\int_A f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sınırlı ise $\lim_k f_k =: f \in \mathcal{L}(A)$ ve

$$\int_A f \equiv \int_A \left(\lim_k f_k \right) = \lim_k \int_A f_k.$$

Kanıt. (i) Bir k için $\int_A f_k = +\infty$ ise sav apaçık doğrudur. Aksi durumda ise her f_k integrallenebilir, dolayısıyla her $m \in \mathbb{N}$ için $g_m := f_0 + \dots + f_m$ integrallenebilir. Savımız $\int_A g_m = \sum_{i=0}^m \int_A f_i$ eşitliği ve Levi Teoremi'nden çıkar.

(ii) (f_k) monoton artan olsun. $S := \{|f_0| = +\infty\}$ bir sıfır kümesidir. h_k fonksiyonu S' 'de $\equiv 0$, $A \setminus S'$ 'de ise $f_k - f_0$ olarak açıklansın. Bu durumda (h_k) monoton artan bir dizidir ve h_k fonksiyonları negatif değerler almaz. Levi Teoremi'nden $h := \lim_k h_k$ integrallenebilir; dolayısıyla $f = h + f_0$ integrallenebilir ve $\int_A f = \int_A h + \int_A f_0$. Diğer yandan $f_k = h_k + f_0$, dolayısıyla

$$\lim_k \int_A f_k = \lim_k \int_A h_k + \int_A f_0 = \int_A h + \int_A f_0 = \int_A f.$$

(f_k) monoton azalansa $(-f_k)$ monoton artandır; sav buradan çıkar. ■

Teorem 3.3.57 (Fatou Önsavı) (f_k) , A 'da negatif değerler almayan ölçülebilir fonksiyonlar dizisi ise

$$\int_A \liminf f_k \leq \liminf \int_A f_k.$$

Kanıt. $g_k := \inf_{m \geq k} f_m$ fonksiyonu negatif değerler almaz ve (g_k) monoton artan ölçülebilir fonksiyonlar dizisidir. Levi Teoremi'nden

$$\int_A \liminf f_k = \int_A \lim g_k = \lim \int_A g_k. \quad (3.52)$$

Her $m \geq k$ için $g_k \leq f_m$, dolayısıyla $\int_A g_k \leq \int_A f_m$. Böylece $\int_A g_k \leq \inf_{m \geq k} \int_A f_m$ ve

$$\lim \int_A g_k \leq \liminf \int_A f_k.$$

Bu (3.52) ile savı verir. ■

Teorem 3.3.58 (Lebesgue Sınırlandırılmış Yakınsaklık Teoremi) $g \in \mathcal{L}(A)$, her $f_k : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir ve A 'da hhy $(f_k(x))$ dizisi bir $f(x)$ 'e yakınsak olsun. Eğer her k için $|f_k| \leq g$ ise $f_k, f \in \mathcal{L}(A)$ ve

$$\int_A f \equiv \int_A \lim f_k = \lim \int_A f_k.$$

Bu teorem kompleks değerli ve vektör değerli fonksiyonlar için de doğrudur.

Kanıt. Her bir f_k 'nın $\mathbb{R}$ -değerli olduğunu ve (f_k) dizisinin tüm A 'da yakınsak olduğunu varsayabiliriz. $|f_k|, |f| \leq g$ olduğundan, Teorem 3.3.51 ile $f_k, f \in \mathcal{L}(A)$. Negatif değerler almayan $(g - f_k)$ ve $(g + f_k)$ dizilerine Fatou Önsavı'nı uygularsak

$$\int_A g \pm \int_A f = \int_A (g \pm f) \leq \liminf \int_A (g \pm f_k)$$

elde ederiz. Buradan

$$\liminf \int_A (g + f_k) = \int_A g + \liminf \int_A f_k$$

ve

$$\liminf \int_A (g - f_k) = \int_A g - \limsup \int_A f_k$$

eşitliklerini kullanarak

$$\limsup \int_A f_k \leq \int_A f \leq \liminf \int_A f_k$$

elde ederiz; işimiz biter. ■

Teorem 3.3.59 $A \in \mathcal{L}^n$, X bir metrik uzay, $f : X \times A \rightarrow \mathbb{R}$, her $x \in X$ için $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^n(A)$ ve

$$F(x) := \int_A f(x, \cdot) \equiv \int_A f(x, y) d\lambda(y)$$

olsun. $a \in X$ verilsin ve $f(\cdot, y)$ fonksiyonu hhy $y \in Y$ için a 'da sürekli olsun. Lebesgue integrallenebilir bir $g : A \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu ve her $x \in X$ için bir S_x sıfır kümesi

$$\forall x \in X \forall y \in A \setminus S_x \quad |f(x, y)| \leq |g(y)|$$

olacak biçimde verilsinler. Bu koşullarda F fonksiyonu a 'da sürekli.

Kanıt. Koşullarımızdan bir $S \subset A$ sıfır kümesi, her $y \in A \setminus S$ için, $f(\cdot, y)$ fonksiyonu a 'da sürekli olacak biçimde vardır. Şimdi $(x_n) \subset X$ ve $x_k \rightarrow a$ olsun. $S^* := S \cup \bigcup_{k \geq 0} S_{x_k}$ kümesi sayılabilir çoklukta sıfır kümesinin birleşimi olarak bir sıfır kümesidir. Dolayısıyla her $y \in A \setminus S^*$ için

$$f(x_k, y) \rightarrow f(a, y) \text{ ve } |f(x_k, y)| \leq g(y).$$

Lebesgue Sınırlandırılmış Yakınsaklık Teoreminden

$$F(a) = \int_A f(a, y) d\lambda(y) = \lim_k \int_A f(x_k, y) d\lambda(y) = \lim_k F(x_k).$$

Dolayısıyla F fonksiyonu a noktasında sürekli dir. ■

Teorem 3.3.60 $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, $A \in \mathcal{L}^n$, $f : I \times A \rightarrow \mathbb{R}$ ve her $x \in I$ için $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}(A)$ olsun ve her $x \in I$ için $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F(x) := \int_A f(x, \cdot) d\lambda \equiv \int_A f(x, y) d\lambda(y)$$

olarak açıklansın. $S \subset Y$ bir sıfır kümesi olmak üzere her $y \in A \setminus S$ için $f(\cdot, y)$ fonksiyonu $a \in I$ noktasında türevlenebilir olsun. Her $x \in I$ için verilmiş bir $S_x \subset A$ sıfır kümesi ve integrallenebilir bir $g : A \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu ile her $y \in A \setminus S_x$ için

$$\frac{|f(x, y) - f(a, y)|}{|x - a|} \leq g(y)$$

sağlansın. Bu koşullarda F fonksiyonu a 'da türevlenebilir ve

$$F'(a) = \int_A \frac{\partial f}{\partial x}(a, \cdot) d\lambda \equiv \int_A \frac{\partial f}{\partial x}(a, y) d\lambda(y).$$

Kanıt. $(x_k) \subset I$ dizisini $\lim x_k = a$ olacak biçimde keyfi seçelim. $S^* := S \cup \bigcup_k S_{x_k} \subset A$ bir sıfır kümesidir ve her $y \in A \setminus S^*$ için

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(x_k, y) - f(a, y)}{x_k - a} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, y) \text{ ve } \left| \frac{f(x_k, y) - f(a, y)}{x_k - a} \right| \leq g(y)$$

Lebesgue Sınırlandırılmış Yakınsaklık Teoreminden, $k \rightarrow +\infty$ ile

$$\frac{F(x_k) - F(a)}{x_k - a} = \int_A \frac{f(x_k, y) - f(a, y)}{x_k - a} d\lambda(y) \rightarrow \int_A \frac{\partial f}{\partial x}(a, y) d\lambda(y).$$

■

3.4 Cavalieri, Fubini ve Dönüşüm Teoremleri

Uzlaşma: Bu kesimde daima $p, q \in \mathbb{N}^*$ ve $n = p + q$ olacaktır. $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ ve $\mathbb{R}^n$ 'nin noktalarını sırasıyla x, y ve z ile göstereceğiz. z yerine bazen (x, y) de yazacağız.

$A \in \mathcal{L}^p, B \in \mathcal{L}^q, n = p + q$ olmak üzere $C := A \times B$ 'ye $\mathbb{R}^n$ 'de bir **ölçülebilir kutu** diyelim. Çarpım Teoremi 3.3.24'te $A \times B \in \mathcal{L}^n$ ve $\lambda_n(A \times B) = \lambda_p(A)\lambda_q(B)$ olduğunu kanıtladık. $C \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^p$ ve her $y \in \mathbb{R}^q$ için

$$C_x := \{y \in \mathbb{R}^q | (x, y) \in C\} \text{ ve } C_y := \{x \in \mathbb{R}^p | (x, y) \in C\}$$

olarak açıklansın. Özel olarak $C = A \times B$ ise

$$C_x := \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases} \text{ ve } C_y := \begin{cases} A & y \in B \\ \emptyset & y \notin B \end{cases}$$

ve Çarpım Teoremi 3.2.26 ile

$$\lambda_n(C) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(C_x) d\lambda_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(C_y) d\lambda_q(y). \quad (3.53)$$

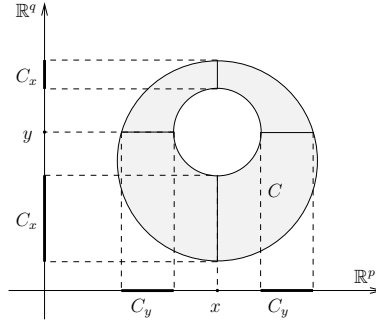
olur. Cavalieri Teoremi bunun her Lebesgue ölçülebilir $C \subset \mathbb{R}^n$ için doğru olduğunu öne sürer. Ancak burada vurgulanması gereken bir nokta var. $Q' \subset \mathbb{R}^p$ ve $Q'' \subset \mathbb{R}^q$ kapalı kutular ve $\dot{Q}' \neq \emptyset$ ve $\dot{Q}'' \neq \emptyset$ olsun. $Q = Q' \times Q''$ olmak üzere $\dot{Q} \subset C \subset Q$ koşulunu sağlayan her küme Lebesgue ölçülebilir. Bu durumda $y \in \dot{Q}''$ ise $C_y = Q'$ ve $y \notin Q''$ ise $C_y = \emptyset$ kesitleri Lebesgue ölçülebilirler. Eğer $y \in \partial Q''$ ise C_y kümesi Q' 'nin herhangi bir altkümesi olduğundan λ_p -ölçülebilir olması gerekmez. $\partial Q''$ bir λ_q sıfır kümesi olduğundan $f(y) := \lambda_p(C_y)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^q$ 'da hhy de tanımlıdır. Benzeri $g(x) := \lambda_q(C_x)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Ancak bir fonksiyonun bir sıfır kümesinde aldığı değerlerin, integrali açısından bir rol oynamadığını biliyoruz. Dolayısıyla (3.53) eşitliğini öyle yazmakta bir sakınca yoktur; aşırı titiz okur o eşitlikte λ_p ve λ_q yerine sırasıyla $\bar{\lambda}_p$ ve $\bar{\lambda}_q$ yazabilir.

İki basit gerçeikle başlayacağız:

(a) $A \subset \mathbb{R}^p$ ve $B \subset \mathbb{R}^q$ kümeleri açık (veya G_δ -kümeleri) iseler $C = A \times B$ de açıktır bir G_δ -kümesidir).

(b) $C \subset \mathbb{R}^n$ açık (veya bir G_δ -kümesi) ise C_x ve C_y kesitleri de açıktır (veya G_δ -kümeleridir).



Şekil 3.6: Cavalieri.

Bu savlar açık kümeler için aşıkardır. G_δ -kümeleri içinse

$$\left(\bigcap_i A_i\right) \times \left(\bigcap_j B_j\right) = \bigcap_{i,j} A_i \times B_j, \quad \left(\bigcap_k C_k\right)_y = \bigcap_k C_{ky}, \quad \left(\bigcap_k C_k\right)_x = \bigcap_k C_{kx}$$

özdeşliklerinden çıkar.

Teorem 3.4.1 (Cavalieri) $C \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilirse $hh y \in \mathbb{R}^q$ için C_y kesiti $\mathbb{R}^p$ 'de ölçülebilir. Ayrıca $f(y) := \bar{\lambda}_p(C_y)$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{R}^q \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir ve

$$\lambda_n(C) = \int_{\mathbb{R}^q} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^q} \bar{\lambda}_p(C_y) dy = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(C_y) dy. \quad (3.54)$$

Benzer biçimde $hh x \in \mathbb{R}^p$ için C_x kesiti $\mathbb{R}^q$ 'de ölçülebilir. Ayrıca $g(y) := \bar{\lambda}_q(C_x)$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{R}^q \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir ve

$$\lambda_n(C) = \int_{\mathbb{R}^p} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^p} \bar{\lambda}_q(C_x) dx = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(C_x) dx. \quad (3.55)$$

Kanıt. Bu eşitliklerdeki son ifadelerde, C_y veya C_x ölçülebilir değilseler, $\lambda_p(C_y)$ ve $\lambda_q(C_x)$ yerine $[0, +\infty]$ 'deki herhangi bir değeri alabiliriz.

Biz (3.54) eşitliğini kanıtlamakla yetineceğiz; (3.55) eşitliği benzer biçimde kanıtlanır. Savı basit yapıları C' lerden başlayarak kademeli biçimde kanıtlayacağız. $\Phi(C)$ ile aşağıdaki önermeyi göstereyim:

$C \in \mathcal{L}^n$, $hh y \in \mathbb{R}^q$ için C_y ölçülebilir, f ölçülebilir ve (3.54) geçerlidir.

(i) $A = Q' \in \mathcal{Q}^p$ ve $B = Q'' \in \mathcal{Q}^q$ birer kutu ve $C = Q' \times Q''$ ise $\Phi(C)$. Gerçekten de $y \in Q''$ ise $C_y = Q'$ ölçülebilir, $y \in \mathbb{R}^q \setminus Q''$ ise $C_y = \emptyset$ yine ölçülebilir. Bu durumda $y \in Q''$ için $f(y) = \bar{\lambda}_p(C_y) = \lambda_p(Q')$ ve $y \notin Q''$ için $f(y) = 0$ olur. Özetle $f = \lambda_p(Q') \cdot 1_{Q''}$ ölçülebilir ve $\int_{\mathbb{R}^q} f(y) dy = \lambda_p(Q') \lambda_q(Q'') = \lambda_n(C)$.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $C_k \in \mathcal{L}^n$, $\Phi(C_k)$ ve $\{C_k\}$ bir ayrık aile ise $\Phi(\bigsqcup C_k)$. Her şeyden önce $C := \bigsqcup C_k \in \mathcal{L}^n$. Her k için $\Phi(C_k)$ olduğundan $\mathbb{R}^q$ 'da bir S_k sıfır kümesi her $y \in \mathbb{R}^q \setminus S_k$ için $C_{ky} \in \mathcal{L}^p$ ve $f_k(y) := \bar{\lambda}_p(C_{ky})$ ile tanımlanan $f_k : \mathbb{R}^q \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir olacak biçimde bulunabilir. $S := \bigcup S_k \subset \mathbb{R}^q$ kümesi bir sıfır kümesidir ve her $y \in \mathbb{R}^q \setminus S$ için $C_y = \bigsqcup C_{ky} \subset \mathbb{R}^p$ ölçülebilir ve Önerme 3.3.20'den dolayı $\mathbb{R}^q \setminus S$ 'de $f(y) := \lambda_p(C_y) = \sum_k \lambda_p(C_{ky}) = \sum_k f_k(y)$ olarak tanımlanan f fonksiyonu ölçülebilir. Sonuç 3.3.56 ile

$$\lambda_n(C) = \sum_k \lambda_n(C_k) \stackrel{\Phi(C_k)}{=} \sum_k \int_{\mathbb{R}^q} f_k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\sum_k f_k(y) \right) dy = \int_{\mathbb{R}^q} f(y) dy.$$

(iii) Şimdi $(C_k) \subset \mathcal{L}^n$ monoton azalan bir dizi, C_k 'ler sınırlı ve $C := \bigcap C_k$ olsun. Her k için $\Phi(C_k)$ ise $\Phi(C)$ olduğunu görelim; bu (ii)'ye benzer biçimde kanıtlanır. Her şeyden önce $C \in \mathcal{L}^n$, hh her y için $C_y = \bigcap C_{ky}$ ölçülebilir. f ve f_k fonksiyonları (ii)'deki gibi tanımlandığında f_k fonksiyonları integrellenebilir ve $f_k \searrow f$. Diğer yandan olduğundan $\Phi(C_k)$ varsayımımızdan $\lambda_p(C_k) = \int_{\mathbb{R}^q} f_k$ olduğundan, yine sonuç 3.3.56 ile f de integrellenebilir ve $\lambda_n(C) = \lim \lambda_n(C_k) = \lim \int_{\mathbb{R}^q} f_k = \lim \int_{\mathbb{R}^q} f$ olur. Sonuçta $\Phi(C)$ geçerlidir.

(iv) Her açık $U \subset \mathbb{R}^n$ sayılabilir çoklukta ayrık kutunun birleşimi olarak yazılabildiğinden, (i) ve (ii) ile $\Phi(U)$ geçerlidir. Bu ve (iii) ile her *sınırlı* G_δ kümesi $H = \bigcap U_k$ için $\Phi(H)$ geçerlidir.

Şimdi A bir *sınırlı* ölçülebilir küme olsun. Sonuç 3.2.25'ten dolayı $A \subset H$ koşulunu sağlayan ve bir sınırlı G_δ -kümesi olan H kümesi $\lambda_n(H \setminus A) = 0$ olacak biçimde bulunabilir. Benzer biçimde sınırlı G_δ -kümesi K ise $H \setminus A \subset K$ ve $\lambda_n(K) = 0$ olacak biçimde bulunabilir. K için (3.54) sağlandığından

$$0 = \lambda_n(K) = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(K_y) dy \implies \mathbb{R}^q \text{de hh } \lambda_p(K_y) = 0$$

olur. $(H \setminus A)_y = H_y \setminus A_y \subset K_y$ olduğundan hh y için $\lambda_p(H_y \setminus A_y) = 0$ olur. H_y ve K_y birer G_δ -kümeleri olduğundan, yine Sonuç 3.2.25 ile hh y için A_y ölçülebilir ve $\lambda_p(H_y) = \lambda_p(A_y)$ olur. Dolayısıyla $f(y) = \lambda_p(A_y)$ fonksiyonu ölçülebilir. (3.54) eşitliği H için geçerli, $\lambda_n(A) = \lambda_n(H)$ ve $\lambda_p(H_y) = \lambda_p(A_y)$ olduğu için, bu eşitlik A için de geçerlidir. Dolayısıyla $\Phi(A)$.

(v) $A \in \mathcal{L}^n$ keyfi verilsin. Sayılabilir çoklukta ayrık, sınırlı ve ölçülebilir A_i 'lerle $A = \bigsqcup_i A_i$ yazabiliriz. (iii)'ten $\Phi(A_i)$, (ii) ile $\Phi(A)$ elde ederiz. ■

Örnek 2.5.6'daki hesaplamalarla, $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ölçülebilir olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ 'de, tabanı A ve yüksekliği h olan silindirin ölçüsünün $h\lambda_{n-1}(A)$, tabanı A ve yüksekliği h olan koninin ölçüsünün $\frac{h}{n}\lambda_{n-1}(A)$ olduğu kolayca görülür.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin. Her $x \in \mathbb{R}^p$ için $f(x, \cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(\cdot, y) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $f(x, \cdot)(y) := f(x, y)$ ve $f(\cdot, y)(x) := f(x, y)$ olarak açıklansın.

Teorem 3.4.2 (Fubini I) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ ölçülebilirse aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) $\mathbb{R}^q$ 'da bir N sıfır kümesi her $y \in \mathbb{R}^q \setminus N$ için $f(\cdot, y) : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir olacak biçimde vardır.
- (ii) Her $y \in \mathbb{R}^q \setminus N$ için $F(y) := \int_{\mathbb{R}^p} f(\cdot, y) d\lambda_p \equiv \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx$ ve $y \in N$ ise F istenildiği gibi açıklansın, örneğin $F|_N \equiv 0$. Bu durumda $F : \mathbb{R}^q \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir.
- (iii)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^q} F(y) dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx \right) dy. \quad (3.56)$$

Bu önermede x ve y 'nin rolleri değişebilir; kanıttan sonra değineceğiz.

Kanıt. Savımızı önce ölçülebilir C kümelerinin $\mathbf{1}_C$ özgün fonksiyonları, ardından basit t fonksiyonları ve sonunda herhangi bir f ölçülebilir fonksiyonları için kanıtlayacağız.

$C \in \mathcal{L}^n$ ve $f := \mathbf{1}_C$ olsun. Elbette $\mathbf{1}_C$ ölçülebilir. Teorem 3.4.1'den dolayı $\mathbb{R}^q$ 'da bir N sıfır kümesi her $y \in \mathbb{R}^q \setminus N$ için C_y ölçülebilir olacak biçimde vardır ve $\mathbf{1}_C(\cdot, y)(x) = \mathbf{1}_C(x, y) = \mathbf{1}_{C_y}(x)$ ile $F(y) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbf{1}_C(x, y) dx = \lambda_p(C_y)$ olur. Teorem 3.4.1'den

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_C = \lambda_n(C) = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(C_y) dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \mathbf{1}_C(x, y) dx \right) dy.$$

Bunun bir sonucu olarak savımız her sonlu basamaklı $\sum \alpha_i \mathbf{1}_{C_i}$ için geçerlidir. Şimdi $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ ölçülebilir fonksiyonu verilsin. Önerme 3.3.21'den dolayı sonlu Lebesgue merdivenlerinin bir φ_k dizisi $\varphi_k \nearrow f$ olacak biçimde bulunabilir. $N_k \subset \mathbb{R}^q$ sıfır kümeleri aşağıdakiler sağlanacak biçimde bulunabilirler:

- (i)_k : $y \in \mathbb{R}^q \setminus N_k$ için $\varphi_k(\cdot, y)$ ölçülebilir,
- (ii)_k : $y \notin N_k$ için $\Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_k(x, y) dx$ ve $y \in N_k$ için $\Phi_k(y) = 0$,
- (iii)_k : $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(z) dz = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi_k(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^q} \Phi_k(y) dy$.

$N := \bigcup N_k$ bir sıfır kümesidir. $\varphi_k \nearrow f$ ve Levi Teoremi 3.3.55'ten $y \notin N$ için $f(\cdot, y)$ 'nin ölçülebilirliği ve $\lim \Phi_k(y) = F(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx$ eşitliği çıkar. Bir kez daha Levi Teoremi ve $F = \lim \Phi_k$ 'den F 'nin ölçülebilirliğini ve $\int_{\mathbb{R}^q} F(y) dy = \lim \int_{\mathbb{R}^q} \Phi_k(y) dy$ eşitliğini elde ederiz. Böylece (i) ve (ii) kanıtlanmış olur. (iii) ise (iii)_k'de limite geçerek elde edilir. ■

Teorem 3.4.3 (Fubini II) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| dz \text{ ve } \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x, y)| dx \right) dy \quad (3.57)$$

integrallerinden herhangi biri sonlu ise $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ve Fubini I teoremi, orada “ölçülebilir” yerine “integrallenebilir aldığımızda da doğrudur.

Kanıt. $F^\pm(y) := \int_{\mathbb{R}^p} f^\pm(x, y) dx$ olsun. Fubini I teoremini $f^\pm$ 'ye uygularsak

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(z) dz = \int_{\mathbb{R}^q} F^\pm(y) dy$$

olur. $\int_{\mathbb{R}^n} |f| < +\infty$ ise $0 \leq f^\pm \leq |f|$ olduğundan $\int f^\pm < +\infty$ ve f Lebesgue integrallenebilir. ■

Şimdi teoremimizde x ve y 'nin rollerini değişelim. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ ölçülebilir olsun. Benzer biçimde $\mathbb{R}^p$ 'de bir N sıfır kümesi her $x \in \mathbb{R}^p \setminus N$ için $f(x, \cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow [0, +\infty]$ ölçülebilir olacak biçimde bulabiliriz. Her $x \in \mathbb{R}^p \setminus N$ için $G(x) := \int_{\mathbb{R}^q} f(x, \cdot) d\lambda_q = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy$ olsun ve $x \in N$ için $G(x)$ istenildiği gibi açıklansın. Bu durumda $G : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, +\infty]$ ölçülebilir ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^p} G(x) dx = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy \right) dx.$$

Buradan devam edersek $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ integrallenebilirse

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy \right) dx.$$

elde ederiz. Bu işlem sürdürülerek, $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ herhangi bir permütasyon ve $x = (x_1, \dots, x_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\cdots \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{\pi(1)} \right) dx_{\pi(2)} \cdots \right) dx_{\pi(n-1)} \right) dx_{\pi(n)} \end{aligned} \quad (3.58)$$

elde edilir.

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $I = \langle a, b \rangle$ ve $f : I \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ Lebesgue integrallenebilir olsun. $I \neq [a, b]$ ise f 'yi $[a, b]$ 'ye herhangi bir biçimde genişletelim; bu yeni fonksiyonu da yine f ile gösterelim. $\partial I = \{a, b\}$ bir sıfır kümesi olduğundan

$$\int_a^b f d\lambda_1 := \int_{[a, b]} f d\lambda_1 = \int_{\langle a, b \rangle} f d\lambda_1.$$

Not 3.4.4 $A \in \mathcal{L}^n$ ve $f \in L(A)$ olsun. $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $\hat{f}|_A := f$ ve $\hat{f}|_{A^c} \equiv 0$ olarak açıklansın. Bu durumda $\hat{f} \in L(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\begin{aligned} \int_A f(z) dz &= \int_{\mathbb{R}^q} \hat{f}(x, y) dy \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \hat{f}(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} \hat{f}(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Burada $\int_{\mathbb{R}^p} \hat{f}(x, y) dx = \int_{A_y} f(x, y) dx$ ve $\int_{\mathbb{R}^q} \hat{f}(x, y) dy = \int_{A_x} f(x, y) dy$. Özel olarak $Q' \in \mathcal{Q}^p$ ve $Q'' \in \mathcal{Q}^q$ kutular olmak üzere $A = Q' \times Q''$ ise

$$\int_{Q' \times Q''} f(z) dz = \int_{Q''} \left(\int_{Q'} f(x, y) dx \right) dy = \int_{Q'} \left(\int_{Q''} f(x, y) dy \right) dx.$$

▲

Uyarı 3.4.5. 1. Ardışık integraller alınabilirken bunların birbirine eşit olması gerekmez!

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)} dy dx = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)} dx dy = \pi.$$

Fubini teoreminden dolayı $f(x, y)$ fonksiyonumuz $[-1, 1]^2$ kutusunda integrellenemez. Bu arada $y \neq 0$ için $f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{x}{y}$ olduğunu belirtelim.

2. Ardışık integraller birbirine eşit olsa bile f 'nin integrellenebilir olması gerekmez! Örneğin

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dy dx = 0,$$

ancak $[0, 1]^2$ 'de $f \geq 0$ olduğundan Fubini I ile

$$\int_{[0,1]^2} f d\lambda_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1 + y^2} \right) dy = +\infty.$$

Eğer f fonksiyonu $[-1, 1]^2$ 'de integrellenebilir olsaydı $[0, 1]^2$ 'de de integrellenebilir olurdu ki bu yukarıdaki sonuçla çelişir!

Teorem 3.4.6 (Dönüşüm Teoremi) $V \subset \mathbb{R}^n$ açık, $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ birebir ve $\mathcal{C}^1$ sınıfından ve $U := \Phi(V)$ olsun. Bir $f : U \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu verilsin. f 'nin ölçülebilir olması için gvyk $F := (f \circ \Phi) |\det \Phi'|$ 'nin ölçülebilir olmasıdır ve bu durumda

$$\begin{aligned} \int_U f(x) dx &\equiv \int_U f = \int_V (f \circ \Phi) |\det \Phi'| \\ &\equiv \int_V f(\Phi(u)) |\det \Phi'(u)| du = \int_V F(u) du. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Eğer $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ise bu önerme “ölçülebilir” yerine “integrellenebilir” yazdığımızda da doğrudur.

Kanıt. Analiz derslerinden U 'nun açık ve Φ^{-1} 'in de $\mathcal{C}^1$ -sınıfından olduğunu biliyoruz. $A \subset U$ için $\varphi(A)$ ile aşağıdaki önerme gösterilsin:

$\varphi(A)$:

$A \subset U$ ölçülebilir, $B := \Phi^{-1}(A)$ ölçülebilir ve $\lambda(A) \equiv \int_U \mathbf{1}_A = \int_V \mathbf{1}_B |\det \Phi'|$.

(i) Savımız $\overline{Q} \subset U$ koşulunu sağlayan $Q \in \mathcal{Q}^n$ kutuları için doğrudur. Kutular Jordan ölçülebilir ve Jordan ölçüleri Lebesgue ölçüleri ile örtüştüğünden Teorem 2.6.3'ten $\varphi(Q)$ geçerlidir.

(ii) U 'da verilen sayılabilir ve ayrık $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi için, her $i \in I$ için $\varphi(A_i)$ ise $\varphi(\bigsqcup_{i \in I} A_i)$ olur; burada 3.3.55 devreye girer.

(iii) $U \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $\lambda_n(A_1) < +\infty$ ve her $i \in \mathbb{N}^*$ için $\varphi(A_i)$ ise Sonuç 3.3.56 (ii) ile $\varphi(\bigcap A_i)$.

Her açık $A \subset U$ kümesini, kapanışları A' 'ya düşen sayılabilir çoklukta ayrık kutunun birleşimi olarak yazabiliriz; öyleyse her açık $A \subset U$ için (ii) ile $\varphi(A)$. Bu ve (iii)'ten her sınırlı G_δ -kümesi A için $\varphi(A)$ geçerlidir. Herhangi bir sınırlı ölçülebilir A kümesine, sınırlı G_δ -kümeleriyle istenildiği kadar yaklaşabiliyoruz; dolayısıyla $\varphi(A)$ geçerlidir. Şimdi $A \in \mathcal{L}^n$ keyfi verilsin. A' yı sayılabilir çoklukta sınırlı ve ayrık ölçülebilir kümelerin birleşimi olarak yazabiliriz; öyleyse $\varphi(A)$ geçerlidir. Öyleyse

$$\int_U \mathbf{1}_A = \int_V \mathbf{1}_B |\det \Phi'| = \int_V (\mathbf{1}_A \circ \Phi) |\det \Phi'|. \quad (3.60)$$

Bu, (3.59) eşitliğinin $\mathbf{1}_A$ tipindeki fonksiyonlar için doğru olduğunu söyler. Dolayısıyla, $A_1, \dots, A_k \subset A$ ölçülebilir ve $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere savımız sonlu basamaklı $t = \sum c_i \mathbf{1}_{A_i}$ Lebesgue merdivenleri için de doğrudur ve ayrıca $T := (t \circ \Phi) |\det \Phi'|$ ölçülebilir.

(a) $f : U \rightarrow [0, +\infty]$ ölçülebilir olsun. Sonlu basamaklı (t_k) Lebesgue merdivenleri dizisi $t_k \nearrow f$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda, $T_k = (t_k \circ \Phi) |\det \Phi'|$ olmak üzere $T_k \nearrow F$, dolayısıyla F ölçülebilir ve (3.59) eşitliği Levi Teoremi 3.3.55'ten çıkar.

(b) $f : U \rightarrow [0, +\infty]$ verilsin ve F ölçülebilir olsun. Şimdi $\Psi := \Phi^{-1}$ olmak üzere $\Psi : V \rightarrow U$ koordinat dönüşümünden yola çıkar, $\Phi(\Psi(x)) = x$ ve $\det \Phi' \det \Psi' = 1$ olduğunu gözetirsek, (a)'dan $f = F \circ \Psi$ 'nin ölçülebilirliğini ve (3.59) eşitliğini kazanırız. Böylece savımız $f : U \rightarrow [0, +\infty]$ tipindeki fonksiyonlar için kanıtlanmıştır.

(c) $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ise $f = f^+ - f^-$ ve savımız f^+ ve f^- 'nin her biri için doğru olduğundan f içinde doğrudur. ■

$\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü $\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ olsun. Örnek 2.6.7'de bu dönüşümü ele aldık ve $\det \Phi'(r, \varphi) = r$ olduğunu biliyoruz.

Sonuç 3.4.7 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun integrallenebilir olması için gerek $F(r, \varphi) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)r$ fonksiyonun $[0, +\infty) \times [0, 2\pi]$ 'de integrallenebilir olmasıdır. İntegrallenme durumunda

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda_2 = \int_{[0, +\infty) \times [0, 2\pi]} F d\lambda_2,$$

veya yaygın gösterimle

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Kanıt. $S := [0, +\infty) \times 0$ kümesi $\mathbb{R}^2$ 'de bir kapalı sıfır kümesidir. Dolayısıyla $U := \mathbb{R}^2 \setminus S$ açık ve ölçülebilir bir kümedir ve f 'nin $\mathbb{R}^2$ 'de integrallenebilir olması f 'nin U 'da integrallenebilir olmasına denktir ve integrallenebilir olma durumunda $\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_U f$. Diğer yandan $V := (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ bir açık kümedir ve $\Phi|_V : V \rightarrow U$, $\mathcal{C}^1$ sınıfından bir eşyapı dönüşümüdür. Teoremimizden f 'nin U 'da integrallenebilir olması F 'nin V 'de integrallenebilir olmasına denktir. $([0, +\infty) \times [0, 2\pi]) \setminus V$ bir sıfır kümesi olduğundan, F 'nin V 'de integrallenebilir olması $[0, +\infty) \times [0, 2\pi]$ 'de integrallenebilir olmasına denktir ve integrallenebilir olma durumunda F 'nin bu kümeler üzerindeki integralleri birbirine eşittir. Kanıt biter. ■

Sonuç 3.4.8 $\Phi_K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu

$$\Phi_K(r, \varphi, \theta) := (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi)$$

olarak tanımlansın(bkz. (2.104)). $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve

$$\begin{aligned} F(r, \varphi, \theta) &:= (f \circ \Phi_K)(r, \varphi, \theta) |\det \Phi'_K(r, \varphi, \theta)| \\ &= f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi) |-r^2 \sin \theta| \end{aligned}$$

olsun. f 'nin $\mathbb{R}^3$ 'te integrallenebilir olması F 'nin $[0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ 'de integrallenebilir olmasına denktir. İntegrallenebilme durumunda

$$\int_{\mathbb{R}^3} f = \int_{[0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]} F,$$

veya açık yazılımla

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz \\ = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Kanıt. $S := [0, +\infty) \times \{0\} \times \mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ 'te bir kapalı sıfır kümesidir. Dolayısıyla f 'nin $\mathbb{R}^3$ 'te integrallenebilir olması $U := \mathbb{R}^3 \setminus S$ açık kümesinde integrallenebilir olmasına denktir ve integrallenebilme durumunda $\int_{\mathbb{R}^3} f = \int_U f$. Ayrıca $V := (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ olmak üzere $\Phi_K|_V \rightarrow U$ bir $\mathcal{C}^1$ -eşyapı dönüşümüdür ve teoremimizden dolayı f 'nin U 'da integrallenebilir olması F 'nin V 'de integrallenebilir olmasına denktir. Öte yandan $S' := ([0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]) \setminus V$ bir sıfır kümesi olduğundan, F 'nin V 'de integrallenebilir olması ise F 'nin $[0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ 'de integrallenebilir olmasına denktir ve bu integraller birbirine eşittir. Bu savı verir. ■

3.5 Vitali Örtüleri ve Yoğunluk

Tanım 3.5.1 $A \subset \mathbb{R}^n$ ve $\mathcal{V}$ ise $\mathbb{R}^n$ 'de, tek noktadan oluşmayan $V \subset \mathbb{R}^n$ kümelerinin bir ailesi olsun. Her $a \in A$ ve her $r > 0$ için bir $V \in \mathcal{V}$ kümesi $a \in V \subset \bar{B}_r(a)$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, $\mathcal{V}$ ailesi A 'nın bir **Vitali örtüsüdür** denir.¹³

$\mathcal{V}$ ailesi A 'nın bir Vitali örtüsü, $U \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $A \subset U$ olsun. O zaman $\mathcal{V}_1 := \{V \in \mathcal{V} | V \subset U\}$ ailesi de A 'nın bir Vitali örtüsüdür. $a \in A$ ve $r > 0$ keyfi verilsinler. $\rho > 0$ sayısını $\leq \min \{\frac{1}{2}d(a, U^c), r\}$ olacak biçimde seçelim. $\mathcal{V}$ ailesi A için bir Vitali örtüsü olduğundan bir $V \in \mathcal{V}$ kümesi $a \in V \subset \bar{B}_\rho(a) \subset \bar{B}_r(a)$ olacak biçimde vardır ve $V \subset \bar{B}_\rho(a) \subset U$ olduğundan $V \in \mathcal{V}_1$.

$V \subset \bar{B}_r(a)$ ise V 'nin $d(V)$ çapı $\leq 2r$ olur. Dolayısıyla Vitali örtüleri yeterinde küçük parçalar içerir. $\mathbb{R}^1$ 'deki kapalı toplarımız, $\alpha \leq \beta$ olmak üzere $[\alpha, \beta]$ kapalı aralıklarıdır. $A = [a, b]$ ise $\mathcal{V} := \{[\alpha, \beta] | \alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha < \beta\}$ ailesi A 'nın bir Vitali örtüsüdür.

Teorem 3.5.2 (Vitali Örtü Önsavı) $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kapalı toplardan oluşan bir $\mathcal{V}$ Vitali örtüsü verilsin. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, ε 'a bağlı, sayılabilir ve ayrık $\{\bar{B}_k\} \subset \mathcal{V}$ ailesi, aşağıdaki koşullar sağlanacak biçimde bulunabilir.

(i) $C := \bigcup \bar{B}_k$ olmak üzere $A \setminus C$ bir sıfır kümesidir.

(ii) $\lambda_n(C) \leq \bar{\lambda}_n(A) + \varepsilon$. Bu özellikten dolayı $\{\bar{B}_k\}$ ε -duyarlıdır denir.

Kanıt. (a) A kümesi sınırlı olsun ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Sınırlı ve açık W kümesini $A \subset W$ ve $\lambda_n(W) \leq \bar{\lambda}_n(A) + \varepsilon$ olacak biçimde seçelim. $B \subset \mathbb{R}^n$

¹³Kimi yazar bu tanımda $\bar{B}_r(a)$ kapalı topu yerine $B_r(a)$ açık topları veya $a \in V \subset K$ koşulunu sağlayan açık veya kapalı K küplerini(kutu değil!) alır. Bunlar kanıtlanacak teoremleri değiştirmez.

herhangi bir topsa, $r(B)$ ile bu topun yarıçapını gösterelim. Elbette $r(B) = r(\bar{B})$.

$$\mathcal{V}_1 := \{\bar{B}|\bar{B} \in \mathcal{V} \text{ ve } \bar{B} \subset W\} \quad \text{ve} \quad s_1 := \sup \{r(\bar{B})|\bar{B} \in \mathcal{V}_1\}$$

olsun. $\mathcal{V}_1$ ailesi de A 'nın bir Vitali örtüsüdür. s_1 sayısı $\mathcal{V}$ 'deki kapalı topların W 'ye düşenlerinin yarıçaplarının supremumudur. W sınırlı olduğu için s_1 sonludur. $\mathcal{V}_1$ 'den r_1 yarıçapı $\geq s_1/2$ olan bir $\bar{B}_1 \in \mathcal{V}_1$ ögesini seçebiliriz.

$$\mathcal{V}_2 := \{\bar{B}|\bar{B} \in \mathcal{V}_1 \text{ ve } \bar{B} \cap \bar{B}_1 = \emptyset\} \quad \text{ve} \quad s_2 := \sup \{r(\bar{B})|\bar{B} \in \mathcal{V}_2\}$$

olsun. Eğer $\mathcal{V}_2 \neq \emptyset$ ise bir $\bar{B}_2 \in \mathcal{V}_2$ 'yi $r_2 := r(\bar{B}_2) \geq s_2/2$ olacak biçimde seçebiliriz. Şimdi $\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_k$ ayrık topları ve $s_1, \dots, s_k$ sayıları seçilmiş olsunlar. $C_k := \bigsqcup_{1 \leq i \leq k} \bar{B}_i$ olmak üzere

$$\mathcal{V}_{k+1} := \{\bar{B}|\bar{B} \in \mathcal{V}_k, \bar{B} \cap C_k = \emptyset\}$$

olsun. Eğer $\mathcal{V}_{k+1} = \emptyset$ ise işimiz biter. Çünkü bu $A \subset C_k$ ve $C = C_k$ demektir, dolayısıyla $A \setminus C = \emptyset$ bir sıfır kümesidir. Ayrıca $C \subset W$ olduğundan $\lambda_n(C) \leq \lambda_n(W) \leq \bar{\lambda}_n(A) + \varepsilon$ sağlanır.

Şimdi her $k \in \mathbb{N}^*$ için $\mathcal{V}_k \neq \emptyset$ olsun. $\{\bar{B}_k\} \subset \mathcal{V}$ bir sayılabilir ayrık ailedir ve $C := \bigsqcup \bar{B}_k$ dersek, sayılabilir kapalı topların birleşimi olarak C ölçülebilir ve $C \subset W$ olduğundan $\lambda_n(C) \leq \lambda_n(W) \leq \bar{\lambda}_n(A) + \varepsilon$ olur. Dolayısıyla (ii) sağlanmıştır. Şimdi (i)'nin sağlandığını görelim. $\bar{B}_k$ topumuzun merkezi a_k olsun; böylece $\bar{B}_k = \bar{B}_{r_k}(a_k)$. Herşeyden önce

$$\sum_{k \geq 1} \tau_n r_k^n = \sum_{k \geq 1} \lambda_n(\bar{B}_k) = \lambda_n(C) \leq \lambda_n(W) < +\infty \quad (3.61)$$

olduğundan $r_k \searrow 0$ ve $s_k \searrow 0$ olur. Sonlu sayıda kapalı topların birleşimi olarak her C_k kompakttır. Şimdi bir p için $x \in A \setminus C_p$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\delta := d(x, C_p) > 0$ olur. $\mathcal{V}$, A 'nın bir Vitali örtüsü olduğundan bir $\bar{B}(a, r) \in \mathcal{V}$ topu $r < \delta/2$ olacak biçimde vardır. Elbette $\bar{B}(a, r) \cap C_p = \emptyset$ ve $s_{p+1} \geq r$ olur. Ayrıca $s_k \searrow 0$ olduğundan

$$\exists j \in \mathbb{N} \ (j > p \text{ ve } s_j \geq r > s_{j+1}).$$

$r > s_{j+1}$ olduğundan $\bar{B}(a, r)$ topu $\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_j$ toplarından birini, diyelim $\bar{B}_m = \bar{B}_{r_m}(a_m)$ 'yi keser. $\bar{B}(a, r) \cap C_p = \emptyset$ olduğundan $m > p$ olmak zordur. Dolayısıyla, $r \leq s_j \leq s_m \leq 2r_m$ olduğunu da gözetirsek, her $z \in \bar{B}(a, r) \cap \bar{B}_{r_m}(a_m)$ için

$$\|x - a_m\| \leq \|x - a\| + \|a - z\| + \|z - a_m\| \leq 2r + r_m \leq 4r_m + r_m = 5r_m.$$

Sonuçta $\|x - a_m\| \leq 5r_m$, dolayısıyla

$$\begin{aligned} A \setminus C_p &\subset \bigcup_{k>p} \bar{B}_{5r_k}(a_k) \\ \bar{\lambda}_n(A \setminus C_p) &\leq \sum_{k>p} \lambda_n(\bar{B}_{5r_k}(a_k)) = \sum_{k>p} 5^n \tau_n r_k^n =: R_{p+1} \end{aligned} \quad (3.62)$$

olur. (3.61) ile $\lim R_{p+1} = 0$ ve $0 \leq \bar{\lambda}_n(A \setminus C) \leq \bar{\lambda}_n(A \setminus C_p) \leq R_{p+1}$ olduğundan $\bar{\lambda}_n(A \setminus C) = 0$ olur.

(b) A sınırsız olsun. $\mathbb{R}^n$ 'de, köşeleri $a \in \mathbb{Z}^n$ 'de ve kenar uzunlukları 1 olan açık küplerimiz sayılabilir çokluktur.¹⁴ Bunlar $U_1, U_2, \dots$ olsunlar. Her $i \in \mathbb{N}^*$ için $\varepsilon_i := \varepsilon/2^i$ ve $A_i := A \cap U_i$ olsun. $\mathcal{V}$ her bir A_i 'nin bir Vitali örtüsüdür ve A_i sınırlıdır. Kanıtın (a) şikkından dolayı $\mathcal{V}$ 'nin sayılabilir bir $\mathcal{V}_i$ alt kümesi, $\mathcal{V}_i$ 'deki toplar U_i 'de ve $C_i := \bigcup \mathcal{V}_i$ olmak üzere, $A_i \setminus C_i$ bir sıfır kümesi ve $\lambda_n(C_i) \leq \bar{\lambda}_n(A_i) + \varepsilon_i$ olacak biçimde bulunabilir. $S := \mathbb{R}^n \setminus (\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*})$ bir sıfır kümesidir. $\mathcal{V}^* := \bigsqcup \mathcal{V}_i$ ve $C := \bigsqcup C_i$ olmak üzere $A \setminus C = (\bigsqcup (A_i \setminus C_i)) \cup (A \cap S)$ bir sıfır kümesidir ve

$$\lambda_n(C) = \sum \lambda_n(C_i) \leq \sum (\bar{\lambda}_n(A_i) + \varepsilon_i) \leq \bar{\lambda}_n(A) + \varepsilon.$$

■

$S := A \setminus C$ bir sıfır kümesi ve $A \subset C \cup (A \setminus C) = C \cup S$ olduğundan

$$\bar{\lambda}_n(A) \leq \bar{\lambda}_n(C) + \bar{\lambda}_n(S) \leq \lambda_n(C) = \sum_i \lambda_n(C_i) \quad (3.63)$$

$A \subset \mathbb{R}^n$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. x noktasını içeren B toplarının ailesini $\mathcal{B}_x$ ile gösterelim.

$$\lim := \lim_{B \downarrow x} \quad , \quad \limsup := \limsup_{B \downarrow x} \quad , \quad \liminf := \liminf_{B \downarrow x} \quad , \quad \liminf_{d(B) \rightarrow 0, B \in \mathcal{B}_x}$$

kısaltmalarını kullanalım. Bu gösterimle, eğer limit varsa

$$\theta(A, x) := \lim_{B \downarrow x} \frac{\bar{\lambda}_n(A \cap B)}{\lambda_n(B)}$$

sayısına A kümesinin x noktasındaki **yoğunluğu** denir. Elbette $0 \leq \theta(A, x) \leq 1$. $\theta(A, x) = 1$ olan x noktalarına A kümesinin **yoğunlaşma noktaları** denir. A ölçülebilir ve x noktası A 'nın bir yoğunlaşma noktası ise, her $B \in \mathcal{B}_x$ için $\lambda_n(A \cap B) + \lambda_n(B \setminus A) = \lambda_n(B)$ olduğundan

$$\lim_{B \downarrow x} \frac{\lambda_n(B \setminus A)}{\lambda_n(B)} = 0. \quad (3.64)$$

¹⁴ Aslında $\mathbb{R}^n$ 'de $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup U_i) = 0$ koşulunu sağlayan herhangi ayrık $U_1, U_2, \dots$ açık kümeleri işimizi görür. Örneğin $U_1 := B_1(0)$ ve $k \geq 2$ için $U_k := B_k(0) \setminus \bar{B}_{k-1}$ alabiliriz.

$U \subset \mathbb{R}^n$ açık ve $x \in U$ ise x noktasının A 'nın bir yoğunlaşma noktası olması için gvyk x 'in $U \cap A$ 'nın bir yoğunlaşma noktası olmasıdır, dd $\theta(A, x) = 1 \iff \theta(U \cap A, x) = 1$. Eğer A bir açık küme ise her $x \in A$ noktası A 'nın bir yoğunlaşma noktasıdır.

Teorem 3.5.3 (Lebesgue Yoğunluk Teoremi) $A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir altküme olsun. A 'nın hemen hemen her noktası A 'nın bir yoğunlaşma noktasıdır.

Kanıt. A 'yı sınırlı varsayabiliriz. Öyleyse A kümesi sınırlı ve $Z := \{a \in A \mid \theta(A, a) < 1\}$ olsun. $0 \leq p < 1$ için

$$A_p := \{x \in A \mid \underline{\theta}(A, x) < p\} \left(\text{burada } \underline{\theta}(A, x) := \liminf_{B \downarrow x} \frac{\bar{\lambda}_n(A \cap B)}{\lambda_n(B)} \right)$$

olsun. $0 < p_k < 1$ ve $p_k \nearrow 1$ ise $A_{p_k} \uparrow Z$ olur. Bu nedenle her $0 < p < 1$ için A_p 'nin bir sıfır kümesi olduğunu göstermek yeterlidir. $0 < p < 1$ olsun ve p sabit tutulsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Bir U_ε açık kümesini $A_p \subset U_\varepsilon$ ve $\lambda_n(U_\varepsilon) \leq \bar{\lambda}_n(A_p) + \varepsilon$ olacak biçimde seçelim. $\mathcal{B}$ ile $\mathbb{R}^n$ 'deki topların ailesini gösterirsek

$$\mathcal{V} := \left\{ B \in \mathcal{B} \mid B \subset U_\varepsilon, \frac{\bar{\lambda}_n(A \cap B)}{\lambda_n(B)} < p \right\}$$

ailesi A_p için bir Vitali örtüsüdür.¹⁵ Teorem 3.5.2'den dolayı sayılabilir ayrık B_v toplarını $\bar{\lambda}_n(A_p \setminus \bigsqcup B_v) = 0$ olacak biçimde seçebiliriz.

$$A_p = \bigsqcup_v (A_p \cap B_v) \cup \left(A_p \setminus \bigsqcup_v B_v \right) \subset \bigsqcup_v (A \cap B_v) \cup \left(A_p \setminus \bigsqcup_v B_v \right)$$

olduğundan

$$\bar{\lambda}_n(A_p) \leq \sum_v \bar{\lambda}_n(A \cap B_v) < p \sum_v \lambda_n(B_v) \leq p \lambda_n(U_\varepsilon) \leq p (\bar{\lambda}_n(A_p) + \varepsilon)$$

olur. Burada $\varepsilon \searrow 0$ limitine geçerse $\bar{\lambda}_n(A_p) \leq p \bar{\lambda}_n(A_p)$ elde ederiz. $0 < p < 1$ olduğu için $\bar{\lambda}_n(A_p) = 0$ olur ve işimiz biter. ■

$x \in \mathring{A}$ ise $\theta(A, x) = 1$ olduğu apaçıktır. Bir $a \in A$ noktasına $\theta(A, a) = 1$ ise A 'nın **iç noktası gibidir** diyelim. Bu durumda Lebesgue Yoğunlaşma Teoremi, Littlewood'un izleyen ilkesine dönüşür: *Herhangi bir ölçülebilir kümenin hemen hemen her noktası bir iç nokta gibidir.*

¹⁵ $\mathcal{B}$ 'deki topların tümü kapalı seçilebilir.

3.6 Tek Değişkenli Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar, Anateorem ve Kısmi İntegrasyon

Riemann integralinde olduğu gibi, çok değişkenli Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların integralinin hesaplamak, Fubini Teoremi yardımıyla tek değişkenli Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların integralini hesaplamaya indirgenir. Burada ise, Riemann integralinde olduğu gibi, integral hesabın Anateoremleri, değişken değiştirme ve kısmi integrasyon devreye girer.

Tanım 3.6.1 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir ve $A \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir ve $0 < \lambda_n(A) < +\infty$ ise

$$O(f, A) := \frac{1}{\lambda_n(A)} \int_A f d\lambda_n$$

sayısına f 'nin A 'daki **ortalama değeri** denir.

Teorem 3.6.2 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilirse h $p \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(p) = \lim_{B \downarrow p} O(f, B) \equiv \lim_{B \downarrow p} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f d\lambda_n. \quad (3.65)$$

Kanıt. (1) $A \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir ve $f = \mathbf{1}_A$ olsun. Bu durumda

$$O(\mathbf{1}_A, B) = \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B \mathbf{1}_A d\lambda_n = \frac{\lambda_n(A \cap B)}{\lambda_n(B)},$$

dolayısıyla $\lim_{B \downarrow p} O(\mathbf{1}_A, B) = \theta(A, p)$. Teorem 3.5.3'ten dolayı h $p \in \mathbb{R}^n$ için

$$\theta(A, p) = \lim_{B \downarrow p} O(\mathbf{1}_A, B) = \mathbf{1}_A(p)$$

(2) $f \geq 0$ ve f ölçülebilir olsun. $\alpha \in (0, +\infty)$ keyfi verilsin ve

$$A_\alpha := \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{B \downarrow p} |O(f, B) - f(p)| > \alpha \right\}$$

olarak açıklansın. Her $\alpha > 0$ için A_α 'nın sıfır kümesi olduğunu görmek yeterlidir. Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\bar{\lambda}_n(A_\alpha) < \varepsilon$ olduğunu savunuyoruz. Önerme 3.3.21'den dolayı, sonlu basamaklı bir φ Lebesgue merdiveni $0 \leq \varphi \leq f$ ve $g := f - \varphi$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^n} g d\lambda_n < \frac{\alpha \varepsilon}{4} \quad (3.66)$$

olacak biçimde seçilebilir. (1)'den dolayı h $p \in \mathbb{R}^n$ için $\lim_{B \downarrow p} O(\varphi, B) = \varphi(p)$. Dolayısıyla A_α kümesi, aşağıda tanımladığımız A'_α kümesinden bir sıfır

kümesi kadar farklıdır.

$$\begin{aligned} A'_\alpha &:= \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{B \downarrow p} |O(g, B) - g(p)| > \alpha \right\}, \\ A'_{\alpha 1} &:= \{ p \in \mathbb{R}^n \mid g(p) > \alpha/2 \}, \\ A'_{\alpha 2} &:= \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{B \downarrow p} O(g, B) > \alpha/2 \right\} \end{aligned}$$

olmak üzere $A'_\alpha \subset A'_{\alpha 1} \cup A'_{\alpha 2}$. Dolayısıyla (3.66) ile

$$\frac{\alpha}{2} \cdot \lambda_n(A'_{\alpha 1}) \leq \int_{A'_{\alpha 1}} g d\lambda_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} g d\lambda_n \leq \frac{\alpha \varepsilon}{4},$$

buradan da $\lambda_n(A'_{\alpha 1}) \leq \varepsilon/2$ elde edilir. $O(g, B) > \alpha/2$ koşulunu sağlayan B kapalı topları $A'_{\alpha 2}$ için bir Vitali örtüsü oluşturur. Bu toplardan sayılabilir tanesi, Teorem 3.5.2'deki gibi seçilirse, (3.63) ile

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \bar{\lambda}_n(A'_{\alpha 2}) &\leq \sum_i \frac{\alpha}{2} \lambda_n(B_i) \leq \sum_i O(g, B_i) \lambda_n(B_i) \\ &= \sum_i \int_{B_i} g d\lambda_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} g d\lambda_n < \frac{\alpha \varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

İki tarafı $\frac{\alpha}{2}$ 'ye bölerek önce $\bar{\lambda}_n(A'_{\alpha 2}) < \frac{\varepsilon}{2}$, ardından her $\varepsilon > 0$ için

$$\bar{\lambda}_n(A'_\alpha) \leq \bar{\lambda}_n(A'_{\alpha 1}) + \bar{\lambda}_n(A'_{\alpha 2}) < \varepsilon$$

olduğundan A'_α , dolayısıyla A_α bir sıfır kümesidir. (2) durumunda sav kanıtlanmıştır.

(3) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir olsun. $f^\pm$ fonksiyonlarına (2) uygulanır. ■

Sonuç 3.6.3 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilirse

$$F(x) := \int_a^x f d\lambda_1$$

integral fonksiyonu hemen her $x \in [a, b]$ noktasında türevlenebilir ve türevin olduğu noktalarda $F'(x) = f(x)$ geçerlidir.

Kanıt. $\mathbb{R}$ 'deki kapalı toplar kapalı aralıklardır. Teorem 3.6.2'den dolayı h $x \in (a, b)$ için yeterince küçük $h > 0$ sayıları ile

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f d\lambda_1 = \lim_{h \downarrow 0} O(f, [x, h]) = f(x).$$

Aynı $[h - x, x]$ aralıkları için geçerlidir. ■

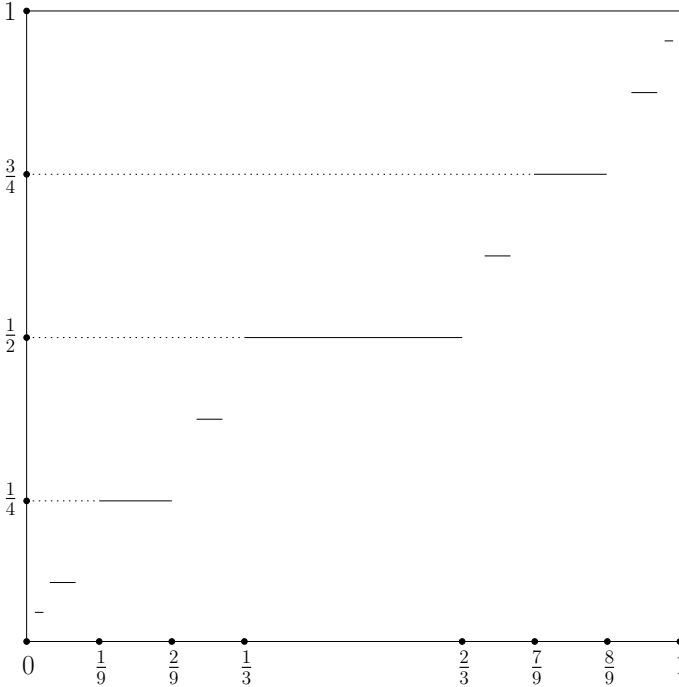
Not. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilir olmak üzere her $A \in \mathcal{L}^n$ için $F(A) := \int_A f d\lambda_n$ olsun. $p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, varsa

$$DF(p) := \lim_{B \downarrow p} \frac{F(B)}{\lambda_n(B)}$$

limitine **F 'nin p 'deki türevi** denir. F 'ye f 'nin integral fonksiyonu, genelde belirsiz integrali denir. Bu adlandırmalarla Teorem 3.6.2 şu bildik şekli alır: *f 'nin F belirsiz integrali h p noktasında türevlenebilir ve türevi f 'ye eşittir.*

▲

Uyarı 3.6.4. Cantor-Lebesgue fonksiyonu: Cantor kümesini oluştururken ilk adımda attığımız açık $(1/3, 2/3)$ aralığını I_{11} ile gösterelim. Kalan iki aralığın ortalarından attığımız iki $(1/9, 2/9)$ ve $(7/9, 8/9)$ açık aralıklarını sırasıyla I_{21}, I_{22} ile gösterelim.



Şekil 3.7: Cantor fonksiyonu

Böyle devam ederek, her $i \in \mathbb{N}^*$ için i .ci adımda attığımız açık aralıkları soldan sağa $I_{i1}, I_{i2}, \dots, I_{i2^{i-1}}$ olarak numaralayalım. Bir $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonunu her $x \in \bar{I}_{ij}$ için $F(x) := (2j - 1) 2^{-i}$ olacak biçimde tanımlayalım, bkz Şekil (3.7). Bu fonksiyonun iyi tanımlı, monoton artan ve sürekli olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. F fonksiyonu her I_{ij} açık aralığında sabit olduğundan orada türevlenebilir ve orada $F' \equiv 0$ olur. Dolayısıyla $U = \bigcup_{i,j} I_{i,j}$ 'de $F' \equiv 0$. $C = [0, 1] \setminus U$ bir sıfır kümesi olduğundan $[0, 1]$ 'de hhy $F'(x) = 0$. Dolayısıyla F' Lebesgue integrallenebilir ve $\int_0^1 F' = 0$. Dolayısıyla

$$\int_0^1 F' = 0 \neq 1 - 0 = F(1) - F(0).$$

Şimdi G fonksiyonu $[0, 1]$ 'de sabit olsun. O zaman F ve G sürekli, hhy $x \in [0, 1]$ için $F'(x) = G'(x)$, ancak $F - G$ sabit değil! Dolayısıyla Riemann integrali için geçerli olan ve Anateorem II Lebesgue integrali için geçerli değil! F ve G 'yi sürekli almak yerine, aşağıda tanımlayacağımız anlamda, *mutlak sürekli* alırsak, o zaman $F - G$ 'nin sabit olduğunu kanıtlayacağız.

Tanım 3.6.5 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı, $[a, b]$ 'ye düşen her sonlu sayıda ayrık $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ aralıkları için

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (\beta_i - \alpha_i) < \delta_\varepsilon \implies \sum_{1 \leq i \leq n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon \quad (3.67)$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında **mutlak sürekli** denir.¹⁶

Her mutlak sürekli fonksiyon düzgün sürekli, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli ve ε ve δ_ε tanımdaki gibi olmak üzere, $[a, b]$ 'deki ayrık $(\alpha_i, \beta_i), i \in \mathbb{N}$ aralıklarıyla

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (\beta_i - \alpha_i) < \delta_\varepsilon \implies \sum_{i \in \mathbb{N}} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| \leq \varepsilon. \quad (3.68)$$

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli ise $f \pm g, fg$ ve $rf, r \in \mathbb{R}$ fonksiyonlarının da mutlak sürekli olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Ayrıca Lipschitz sürekli fonksiyonlar mutlak sürekli.

¹⁶Bu adlandırmada karasız kaldım. “Mutlak” sıfatı bizde mutlak değeri çağırıştırır. Mutlak süreklilikte mutlak değer işe karışmaz. Aslında sürekli fonksiyonlar arasında bazı sınıflandırmalar yapıyoruz: sürekli, düzgün sürekli, Lipschitz sürekli, mutlak sürekli. “Mutlak sürekli fonksiyonlar” sürekliliği en güçlü olanıdır. O nedenle “tam sürekli” veya benzeri bir adlandırma daha doğru olurdu!

Not. Mutlak sürekli fonksiyonlar düzgün süreklidir (Tanım 3.6.5'te $n = 1$ alınız).

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyonu } f(x) := \begin{cases} x^n \sin \frac{2\pi}{x} & , x \in (0, 1], n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

olsun. Her n için f_n düzgün sürekli, f_1 mutlak sürekli ancak $n \geq 2$ için f_n mutlak sürekli değildir. $\blacktriangle$

Teorem 3.6.6 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilir olsun.

- (i) $F(x) := \int_a^x f$, $x \in [a, b]$ integral fonksiyonu mutlak süreklidir.
- (ii) Hemen her $x \in [a, b]$ noktasında $\exists F'(x) = f(x)$.
- (iii) $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli ve hemen her $x \in [a, b]$ için G türevlenebilir ve $G'(x) = f(x)$ ise $F - G$ sabittir.¹⁷

Kanıt. (i) (a): $E \subset [a, b]$ ölçülebilir ve $f = \mathbf{1}_E$ olsun. Her $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ için

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{1}_E d\lambda_1 = \lambda_1(E \cap (\alpha, \beta)).$$

$\varepsilon > 0$ keyfi verilsin ve $\delta_{\varepsilon} = \varepsilon$ seçilsin. Sonlu sayıda ayrık (α_i, β_i) aralıklarla $\sum_i (\beta_i - \alpha_i) < \delta_{\varepsilon}$ ise

$$\sum_i (F(\beta_i) - F(\alpha_i)) = \sum_i \lambda_1(E \cap (\alpha_i, \beta_i)) < \sum_i (\beta_i - \alpha_i) < \delta_{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Dolayısıyla $f = \mathbf{1}_E$ için F mutlak süreklidir.

(b): $f \geq 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Sonlu basamaklı φ Lebesgue merdiven fonksiyonunu $0 \leq \varphi \leq f$ ve $g := f - \varphi$ olmak üzere, $\int_a^b g d\lambda_1 < \varepsilon/2$ olacak biçimde seçelim. $\Phi(x) := \int_a^x \varphi d\lambda_1$ ise φ 'nin integral fonksiyonu olsun. (a)'dan ve integralin doğrusallığından bir $\delta_{\varepsilon} > 0$ sayısını $[a, b]$ 'ye düşen her sonlu ve ayrık $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ aralıkları için

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (\beta_i - \alpha_i) < \delta_{\varepsilon} \implies \sum_{1 \leq i \leq n} (\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)) < \varepsilon/2$$

olacak biçimde seçebiliriz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \sum_i (F(\beta_i) - F(\alpha_i)) &= \sum_i \int_{\alpha_i}^{\beta_i} g d\lambda_1 + \sum_{1 \leq i \leq n} (\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)) \\ &\leq \int_a^b g d\lambda_1 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

¹⁷ Az ileride mutlak sürekli fonksiyon hemen her yerde türevlenebilir olduğunu öğreneceğiz.

ve F mutlak süreklidir.

(c) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir olsun. İntegrallenebilir $f^\pm : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları ile $f^\pm \geq 0$ ve $f = f^+ - f^-$. Her $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ için

$$|F(\beta) - F(\alpha)| = \left| \int_\alpha^\beta f d\lambda_1 \right| \leq \int_\alpha^\beta |f| d\lambda_1 = \int_\alpha^\beta f^+ d\lambda_1 + \int_\alpha^\beta f^- d\lambda_1$$

olur. Bu ve (b)'den F 'nin mutlak sürekliliği çıkar. (i)'nin kanıtı biter.

(ii) Bu Sonuç 3.6.3'tür.

(iii) G mutlak sürekli ve h için $\exists G'(x) = f(x)$ olsun. Bu durumda $H := F - G$ fonksiyonu da mutlak süreklidir ve h için $H'(x) = 0$ olur. H 'nin sabit olduğunu gösterirsek işimiz biter.

$x^* \in [a, b]$ keyfi verilsin ve sabit tutulsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Bu durumda $|H(x^*) - H(a)| < \varepsilon$ olduğunu göstermek yeterlidir. H mutlak sürekli olduğundan bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı ayırık $I_k = (\alpha_k, \beta_k) \subset [a, b]$, $k = 1, 2, \dots$ aralıkları ile

$$\sum_k \lambda_1(I_k) = \sum_k (\beta_k - \alpha_k) < \delta_\varepsilon \implies \sum_k |H(\beta_k) - H(\alpha_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.69)$$

olacak biçimde bulunabilir.

$$X := \{x \in [a, x^*] \mid \exists H'(x) \text{ ve } H'(x) = 0\}$$

olsun. Her $x \in X$ için, istenildiği kadar küçük $h > 0$ sayısı,

$$\left| \frac{H(x+h) - H(x)}{h} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (3.70)$$

olacak biçimde bulunabilir. Bu $[x, x+h]$ aralıkları X 'in bir Vitali örtüsünü oluşturur. Vitali Örtü Lemması'dan dolayı, bu aralıklardan sayılabilir tane ayırık $[x_k, x_k + h_k]$ $k = 1, 2, \dots$ aralığı neredeyse X 'i örtecek biçimde bulunabilir. $[a, x^*] \setminus X$ bir sıfır kümesi olduğundan $\sum_k h_k = x^* - a$. Dolayısıyla bir N sayısı $\sum_{1 \leq k \leq N} h_k > x^* - a - \delta_\varepsilon$ olacak biçimde seçilebilir. N sayısını sabit tutacağımızdan, gerekirse yeniden sıralama yaparak

$$a \leq x_1 < x_1 + h_1 \leq x_2 < x_2 + h_2 \leq \dots \leq x_N < x_N + h_N \leq x^*$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} & H(x^*) - H(a) \\ &= [H(x^*) - H(x_N + h_N)] + [H(x_N + h_N) - H(x_N)] \\ &+ [H(x_N) - H(x_{N-1} + h_{N-1})] + [H(x_{N-1} + h_{N-1}) - H(x_{N-1})] \\ &+ \dots \\ &+ [H(x_2) - H(x_1 + h_1)] + [H(x_1 + h_1) - H(x_1)] \\ &+ [H(x_1) - H(a)]. \end{aligned}$$

Bu eşitliğin sağında iki sütun var. İlk sütundaki terimlerin mutlak değerlerinin toplamı (3.69)'dan dolayı $< \frac{\varepsilon}{2}$, ikinci sütundaki terimlerin mutlak değerlerinin toplamı ise (3.70)'ten dolayı $< \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Sonuçta $|H(x^*) - H(a)| < \varepsilon$ olur ve işimiz biter. ■

$I = [a, b]$ aralığı verilsin $n \in \mathbb{N}^*$ ve $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ olmak üzere I 'nin bu tipten $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanışlarının kümesini $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(I)$ ile gösterelim. Ayrıca $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ise

$$\begin{aligned} V(f, D) &:= \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ p(f, D) &:= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ \\ n(f, D) &:= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \end{aligned}$$

olarak açıklansın. $D \prec D'$ ise $V(f, D) \leq V(f, D')$, aynıısı $p(f, D)$ ve $n(f, D)$ için geçerlidir. Açıkça $V(f, D) = p(f, D) + n(f, D)$.

Tanım 3.6.7 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin.

$$V_a^b f := \sup_{D \in \mathcal{D}([a, b])} V(f, D) = \sup_{a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

değerine f 'nin $[a, b]$ 'deki **değişimi** denir. $V_a^b f < +\infty$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ 'de **sınırlı değişimlidir** denir.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton artansa $V_a^b f = f(b) - f(a)$, f monoton azalansa $V_a^b f = f(a) - f(b)$ olduğu kolayca görülür. Özetle; *her monoton $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı değişimlidirler ve $V_a^b f = |f(b) - f(a)|$* . Dolayısıyla sınırlı değişimli fonksiyonların sürekli olmaları gerekmez! $[0, 1]$ 'de, $f(x) := x^2 \cos(\pi/x^2)$, $0 < x \leq 1$ ve $f(0) := 0$ olarak tanımlanan f fonksiyonu türevlenebilir ancak sınırlı değişimli değildir. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir Lipschitz fonksiyonu ve bir $M > 0$ ile

$$\forall x, y \in [a, b] \implies |f(y) - f(x)| \leq M |y - x| \quad (3.71)$$

olsun. Bu durumda $V_a^b f \leq M |b - a|$ olur. Özetle: *Lipschitz fonksiyonları sınırlı değişimlidir*. Bunun bir sonucu olarak *sürekli türevlenebilir fonksiyonlar Lipschitz süreklidirler*. Bu durumda $M := \max\{|f'(x)| \mid a \leq x \leq b\}$ ile (3.71) sağlanır. Yine kolayca görüleceği gibi f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı değişimli ise $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ olmak üzere $[\alpha, \beta]$ 'da da sınırlı değişimlidir ve $V_\alpha^\beta f \leq V_a^b f$.

Tanım 3.6.8 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı değişimli olsun.

$$\begin{aligned} p_f(x) &:= \sup_{D \in \mathcal{D}([a, x])} p(f, D) \\ n_f(x) &:= \sup_{D \in \mathcal{D}([a, x])} n(f, D) \\ v_f(x) &:= \sup_{D \in \mathcal{D}([a, x])} V(f, D). \end{aligned}$$

Doğrudan tanımdan p_f ve n_f fonksiyonların monoton artan olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.6.9 (Jordan Ayrışım Teoremi) Bir $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sınırlı değişimli olması için gerek ve yeter koşul monoton artan $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları ile $f = f_1 - f_2$ olmasıdır.

Ayrıca $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı değişimli ise her $x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= p_f(x) - n_f(x) \quad \text{ve} \\ v_f(x) &= p_f(x) + n_f(x). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Kanıt. Savın bir yönü aşıkâr. f_1, f_2 monoton artan ve $f = f_1 - f_2$ olsun. Monoton fonksiyonlar sınırlı değişimli ve sınırlı değişimli fonksiyonlar bir vektör uzayı oluşturdıklarından f de sınırlı değişimli olur.

Şimdi f sınırlı değişimli olsun. (3.72)'yi kanıtlarsak işimiz biter; çünkü $f_1 := p_f + f(a)$ ve $f_2 := n_f$ monoton artan fonksiyonlardır ve $f = f_1 - f_2$ olur.

Her $x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} v_f(x) &= \sup_{D \in \mathcal{D}([a, x])} V(f, D) = \sup_{D \in \mathcal{D}([a, x])} (p(f, D) + n(f, D)) \\ &\leq \sup_{D \in \mathcal{D}([a, x])} p(f, D) + \sup_{D \in \mathcal{D}([a, x])} n(f, D) = p_f(x) + n_f(x). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $D_1, D_2 \in \mathcal{D}([a, x])$ parçalanışlarını

$$p_f(x) - p(f, D_1) < \varepsilon/2 \quad \text{ve} \quad n_f(x) - n(f, D_2) < \varepsilon/2 \quad (3.74)$$

olacak biçimde seçelim. $x_{i-1} < t < x_i$ olsun. $f(t)$ ya $f(x_{i-1})$ ile $f(x_i)$ 'nin arasındadır ya değildir. Bu iki durum ayrı ayrı irdelenerek

$$\begin{aligned} (f(x_i) - f(t))^+ + (f(t) - f(x_{i-1}))^+ &\geq (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ \\ (f(x_i) - f(t))^- + (f(t) - f(x_{i-1}))^- &\geq (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $D := D_1 \cup D_2$ için

$$p(f, D) \geq p(f, D_1) \quad \text{ve} \quad n(f, D) \geq n(f, D_2) \quad (3.75)$$

elde edilir. Buradan ise (3.74) ile

$$v_f(x) \geq v(f, D) = p(f, D) + n(f, D) > p_f(x) - \frac{\varepsilon}{2} + n_f(x) - \frac{\varepsilon}{2} = p_f(x) + n_f(x) - \varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon \searrow 0$ ile $v_f(x) \geq p_f(x) + n_f(x)$ olur. Bu ve (3.73) ile $v_f(x) = p_f(x) + n_f(x)$ olur. Doğrudan tanımdan her $D \in \mathcal{D}([a, x])$ için $p(f, D) - n(f, D) = f(x) - f(a)$ olduğu kolayca görülür. Buradan, önce $p(f, D) + f(a) = n(f, D) + f(x)$, ardından supremuma geçerek

$$f(x) = (p_f(x) + f(a)) - n_f(x) \quad (3.76)$$

elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonu monoton artan $p_f + f(a)$ ve n_f fonksiyonlarının farkına eşittir. ■

Sonuç 3.6.10 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilirse $F(x) = \int_a^x f d\lambda_1$ integral fonksiyonu sınırlı değişimlidir.

Kanıt. $F^\pm(x) := \int_a^x f^\pm d\lambda_1$ olmak üzere $F^\pm$ monoton artan ve $F = F^+ - F^-$ olduğundan sav Jordan Ayrışım Teoremi'nden çıkar. ■

Lemma 3.6.11 $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a < b < c$ ise $V_a^c f = V_a^b f + V_b^c f$.

Kanıt. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b = y_0 < y_1 < \dots < y_n = c$ olmak üzere

$$\sum_{1 \leq i \leq m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{1 \leq j \leq n} |f(y_j) - f(y_{j-1})| \leq V_a^c f.$$

Bu eşitsizlikte önce ilk toplam, ardından ikinci toplam üzerinden supremuma geçerse

$$V_a^b f + V_b^c f \leq V_a^c f \quad (3.77)$$

olur. Şimdi $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c$ verilsin. Bir k ile $x_{k-1} \leq b \leq x_k$ olur. O zaman

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(b) - f(x_{k-1})| + |f(x_k) - f(b)| \\ &+ \dots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq V_a^b f + V_b^c f. \end{aligned} \quad (3.78)$$

(3.77) ve (3.78) savı verir. ■

Buradan tümevarımla her $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ için

$$V_a^b f = \sum_{1 \leq i \leq n} V_{x_{i-1}}^{x_i} f. \quad (3.79)$$

Önerme 3.6.12 Her mutlak sürekli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı değişimlidir.

Kanıt. $\varepsilon = 1$ için $\delta > 0$ sayısını her sonlu sayıda ayrık $I_k = (\alpha_k, \beta_k) \subset [a, b]$ için

$$\sum_k (\beta_k - \alpha_k) < \delta \implies \sum_k |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < 1 \quad (3.80)$$

olacak biçimde seçebiliriz. $[a, b]$ 'nin $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ parçalanışını her $1 \leq i \leq N$ için $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ olacak biçimde seçelim. (3.80)'den $V_{x_{i-1}}^{x_i} f \leq 1$, bu ve (3.79) ile $V_a^b f = \sum_{1 \leq i \leq N} V_{x_{i-1}}^{x_i} f \leq N$. Dolayısıyla f , $[a, b]$ 'de sınırlı değişimlidir. ■

Analiz derslerinde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a < b$ ise

$$s := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

sayısına f 'nin $[a, b]$ 'deki eğimi denir.

Lemma 3.6.13 (Chebyshev Önsavı) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton artan ve $I := [a, b]$ 'deki eğimi s olsun. $S > s$ olmak üzere I 'ya düşen sayılabilir çoklukta I_k aralıklarında f 'nin eğimleri $\geq S$ ise

$$\sum_k \lambda_1(I_k) \leq \frac{s}{S} \lambda_1(I). \quad (3.81)$$

Kanıt. $I_k = [a_k, b_k]$ olmak üzere, f monoton artan olduğundan

$$f(b) - f(a) \geq \sum_k (f(b_k) - f(a_k)) \geq \sum_k S(b_k - a_k) = S \cdot \sum_k \lambda_1(I_k).$$

Buradan, $f(b) - f(a) = s \cdot \lambda_1(I)$ olduğundan sav çıkar. ■

Tanım 3.6.14 f fonksiyonu x noktasının bir komşuluğunda tanımlı ise, $h \neq 0$ olmak üzere, $\mathbb{R}$ 'deki

$$\begin{aligned} D^+ f(x) &:= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, & D_+ f(x) &:= \liminf_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \\ D^- f(x) &:= \limsup_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, & D_- f(x) &:= \liminf_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

değerlerine f 'nin x 'teki **Dini türevleri** denir.

f 'nin x noktasında türevlenebilir olması bu türevlerin sonlu ve birbirine eşit olması demektir.

Teorem 3.6.15 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton f fonksiyonu $[a, b]$ 'de hemen her yerde türevlenebilir, f' integrallenebilir ve

$$\int_a^b f' d\lambda_1 \leq f(b) - f(a). \quad (3.82)$$

Kanıt. f 'nin hemen her yerde türevinin olduğunu kanıtlamak için iki şey kanıtlanmalıdır: Birincisi dört Dini türevlerinin hhy birbirine eşit olduğu, ikinci olarak türevin hhy sonlu olduğu kanıtlanmalıdır. f 'nin herhangi iki türevinin birbirine hhy eşit olduklarını göstermek içinse, herhangi birinin bir diğerinden büyük olduğu noktaların bir sıfır kümesi olduğu göstermek yeterlidir. Biz örnek olarak

$$E := \{x \in [a, b] \mid D_- f(x) < D^+ f(x)\} \text{ 'nin}$$

bir sıfır kümesi olduğunu göstereceğiz. Tüm diğer durumlar benzer biçimde kanıtlanır. $s, S \in \mathbb{R}$ sayılarını $s < S$ olacak biçimde keyfi seçelim.

$$E_{sS} := \{x \in [a, b] \mid D_- f(x) < s < S < D^+ f(x)\}$$

olsun.

$$\bar{\lambda}_1(E_{sS}) = 0$$

olduğunu savunuyoruz. $h > 0$ olmak üzere $[x - h, x]$ tipindeki aralıklara sol aralık, $[x, x + h]$ tipindekilere ise sağ aralık diyelim. Her $x \in E_{sS}$ için f 'nin $[x - h, x]$ 'deki eğimi $< s$ olan istenildiği kadar küçük sol $[x - h, x]$ aralıkları vardır. Dolayısıyla $\mathcal{V}_{sol} := \{[x - h, x] \mid h > 0\}$, E_{sS} 'nin bir Vitali örtüsüdür. Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Vitali Örtü Önsavı ile sayılabilir çoklukta ayrık $L_i \in \mathcal{V}_{sol}$ aralıklarını ε -duyarlı olacak biçimde seçebiliriz. Yani $L := \bigsqcup_i L_i$ dersek $E_{sS} \setminus L$ bir sıfır kümesidir ve $\lambda_1(L) \leq \bar{\lambda}_1(E_{sS}) + \varepsilon$.

Her $y \in L$ için istenildiği kadar küçük sağ $[x, x + h] \subset L \cap E_{sS}$ aralıkları, f 'nin $[x, x + h]$ 'deki eğimi $> S$ olacak biçimde bulunabilir. Bu tür sağ aralıklar $L \cap E_{sS}$ 'nin bir $\mathcal{V}_{sağ}$ Vitali örtüsünü oluşturur. Vitali Örtü Önsavı'ndan sayılabilir çoklukta ayrık R_j sağ aralıkları $L \cap E_{sS}$ 'yi bir sıfır kümesi dışında örtecek biçimde bulunabilir. $R := \bigsqcup_j R_j$ olsun. $E_{sS} \setminus L$ bir sıfır kümesi olduğundan $\{R_j\}$ ailesi E_{sS} 'yi neredeyse örter. Chebyshev Önsavı ile

$$\bar{\lambda}_1(E_{sS}) \leq \lambda_1(R) = \sum_i \sum_{R_j \subset L_i} \lambda_1(R_j) \leq \sum_i \frac{s}{S} \lambda_1(L_i) \leq \frac{s}{S} (\bar{\lambda}_1(E_{sS}) + \varepsilon)$$

elde edilir. Bu her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan $\bar{\lambda}_1(E_{sS}) \leq \frac{s}{S} \bar{\lambda}_1(E_{sS})$, dolayısıyla $\bar{\lambda}_1(E_{sS}) = 0$. Buradan E_{sS} ölçülebilir ve $\lambda_1(E_{sS}) = 0$ elde edilir. Sonuçta

$$E = \{x \in [a, b] \mid D_- f(x) < D^+ f(x)\} = \bigcup_{(s,S) \in \mathbb{Q}^2, s < S} E_{sS}$$

bir sıfır kümesidir. $\{x \in [a, b] \mid D_-f(x) < D^+f(x)\}$ 'nin bir sıfır kümesi olduğu benzer biçimde gösterilir. Dolayısıyla hhy $D_-f(x) = D^+f(x)$. Sonlu sayıdaki diğer seçenekler benzer biçimde kanıtlanır. Dolayısıyla f fonksiyonu hhy türevlenebilir.

Şimdi f 'nin türevinin hhy sonlu olduğunu görelim. f monoton artan olduğundan, herhangi bir Dini türevi sonlu değilse $+\infty$ olmak zorundadır. Her $x < a$ için $f(x) := f(a)$ ve $b < x$ için $f(b) := f(x)$ olarak açıklayarak f fonksiyonunu $\mathbb{R}$ 'ye genişletelim. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için f 'nin $[x, x + 1/n]$ aralığındaki eğimini $g_n(x)$ ile gösterelim, dd

$$g_n(x) := \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n} = n[f(x + 1/n) - f(x)]. \quad (3.83)$$

f monoton artan olduğundan hhy süreklidir, dolayısıyla f ölçülebilir. Bunun sonucu olarak g_n ölçülebilir. (3.83)'ten hh x için $\exists \lim_n g_n(x) = D^+f(x) = f'(x)$. Ölçülebilir g_n 'lerin limiti olarak f' ölçülebilir ve $f' \geq 0$. Fatou Önsavı'ndan

$$\int_a^b f' d\lambda_1 = \int_a^b \liminf_n g_n d\lambda_1 \leq \liminf_n \int_a^b g_n. \quad (3.84)$$

Diğer yandan $y = x + 1/n$ dersek

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x + 1/n) dx &= \int_{a+1/n}^{b+1/n} f(y) dy \\ &= \int_{a+1/n}^b f + \int_b^{b+1/n} f(b) = \int_{a+1/n}^b f + f(b) \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

olur. f monoton artan olduğundan $n \int_a^{a+1/n} f \geq n \int_a^{a+1/n} f(a) = f(a)$ ve

$$\begin{aligned} \int_a^b g_n d\lambda_1 &= n \left(\int_{a+1/n}^b f + f(b) \cdot \frac{1}{n} - \int_a^b f \right) \\ &= f(b) - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \leq f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Bu ve (3.84)'ten

$$\int_a^b f' d\lambda_1 \leq f(b) - f(a).$$

Dolayısıyla f' integrallenebilir. f monoton artan olduğundan $f' \geq 0$, ayrıca $\int_a^b f' < +\infty$ olduğundan hhy $f'(x) \in \mathbb{R}$. ■

Sonuç 3.6.16 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz fonksiyonları, sınırlı değişimli fonksiyonları ve mutlak sürekli fonksiyonları hhy türevlenebilirler.

Kanıt. Sınırlı değişimli fonksiyonlar, Jordan Ayrışım teoremine göre iki monoton artan fonksiyonun farkı olarak hhy türevlenebilirler. Lipschitz fonksiyonları sınırlı değişimlidir (doğrudan tanımdan çıkar), dolayısıyla hhy türevlenebilirler. Mutlak sürekli fonksiyonlar sınırlı değişimlidir (bkz. Önerme 3.6.12), dolayısıyla hhy türevlenebilirler. ■

Not. Teorem 3.6.6(iii)'te mutlak sürekli G fonksiyonunun hhy türevlenebilir olmasını istemiştik. Artık bunun kendiliğinden sağlandığını biliyoruz! ▲

Bazı kazanımlarımıza Riemann integralindeki adlandırmaları verelim. Teorem 3.6.6 (i) ve (ii) şu şekli alır.

Teorem 3.6.17 (Lebesgue Anateoremi I) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilirse

$$F(x) := \int_a^x f d\lambda_1$$

integral fonksiyonu mutlak sürekli, hhy türevlenebilir ve türevin olduğu noktalarda ise $F'(x) = f(x)$ geçerlidir.

Teorem 3.6.6(iii), Sonuç 3.6.16 ile birlikte şu şekli alır:

Teorem 3.6.18 (Lebesgue Anateoremi II) $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli ise her $x \in [a, b]$ için $\exists G'(x)$, $G' \in L^1([a, b])$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$G(x) - G(a) = \int_a^x G' f d\lambda_1.$$

Teorem 3.6.19 (Kısmi İntegrasyon) $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyonlarsa

$$\int_a^b FG' = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F'G. \quad (3.85)$$

Kanıt. F, G , ve FG fonksiyonlarının her üçü de $[a, b]$ 'de mutlak sürekli olduğundan orada hhy türevlenebilir. Dolayısıyla $[a, b]$ 'deki bir S sıfır kümesi dışında üçü de türevlenebilir ve orada

$$(FG)' = F'G + FG' \quad (3.86)$$

geçerlidir. İkinci Anateoremden F' ve G' integrallenebilir. F, G sınırlı sürekli fonksiyonlar olduğundan $F'G$ ve FG' integrallenebilir (Bu savı (*) ile gösterelim). (3.86)'dan

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b FG' + \int_a^b F'G.$$

Ancak (*) önermesini kanıtlamış değiliz. Biz Lebesgue-Stieltjes integraline girmedik. Bu konuyu işleyen her kitapta okur (*) önermesinin kanıtını bulabilir. Biz yine de (3.85) savının bir başka kanıtını vereceğiz. $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \geq 0, g \geq 0$ olsunlar.

(1) $\alpha, \beta \geq 0$ ve $f \equiv \alpha = \alpha \mathbf{1}_I, g \equiv \beta = \beta \mathbf{1}_I$ sabit fonksiyonları olsunlar. Bu durumda $F(x) = \alpha x + c$ ve $G(x) = \beta x + c'$ olur. $c = c' = 0$ alınabilir, çünkü aşağıdaki hesaplarda bu terimleri içeren terimler birbirini götürür; bunu okura bırakıyoruz.

$$\begin{aligned} F(b)G(b) - F(a)G(a) &= (\alpha b)(\beta b) - (\alpha a)(\beta a) \\ &= \alpha\beta b^2 - \alpha\beta a^2 \\ \int_a^b FG' + \int_a^b F'G &= \int_a^b \alpha\beta x dx + \int_a^b \alpha\beta x dx = \alpha\beta b^2 - \alpha\beta a^2. \end{aligned}$$

Savımız bu durumda doğrudur.

(2) $f = \varphi$ ve $g = \psi$ merdiven fonksiyonları olsunlar. I 'nın bir $I_1 = \langle a, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{n-1}, b \rangle$ parçalanışını $f = \sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{I_i}$ ve $g = \sum_i \beta_i \mathbf{1}_{I_i}$ olacak biçimde seçelim. (1)'den dolayı savımız her bir I_i aralığında doğrudur. Bu aralıklardaki eşitlikleri taraf tarafa toplayarak savımızı elde ederiz.

(3) $f, g : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ Lebesgue integrallenebilir olsunlar. $\varphi_k, \psi_k : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ sonlu merdiven fonksiyonlarını $\varphi_k \nearrow f$ ve $\psi_k \nearrow g$ olacak biçimde seçebiliriz. Φ_k ve Ψ_k fonksiyonları sırasıyla φ_k ve ψ_k 'nin integral fonksiyonları ise (2)'den dolayı her k için

$$\Phi_k(b)\Psi_k(b) - \Phi_k(a)\Psi_k(a) = \int_a^b \Phi_k \Psi'_k + \int_a^b \Phi'_k \Psi_k.$$

Burada limite geçerse sav Monoton Yakınsaklık Teoreminden çıkar.

(4) $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir olsunlar. $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$ ve sav $f^\pm$ ve $g^\pm$ için doğru olduğundan f ve g içinde doğrudur. ■

Not. Bu teoremin Fubini Teoremi üzerinden yalın bir kanıtını verelim: $T :=$

$\{(x, y) \mid a \leq y \leq x \leq b\}$ olsun.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b F(x)g(x)dx &= \int_a^b \left(F(a) + \int_a^x f(y)dy \right) g(x)dx \\
 &= \int_a^b F(a)g(x)dx + \int_T \mathbf{1}_T(x, y)f(y)g(x)d\lambda_2 \\
 &= F(a) (G(b) - G(a)) + \int_a^b \left(\int_y^b g(x)dx \right) f(y)dy \\
 &= F(a) (G(b) - G(a)) + \int_a^b (G(b) - G(y)) f(y)dy \\
 &= F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(y)G(y)dy \\
 &= F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.
 \end{aligned}$$

▲

$n = 1$ durumunda Dönüşüm Teoremi 3.4.6 genelleştirilebilir.

Teorem 3.6.20 (Değişken Değiştirme) $g \in L^1([\alpha, \beta])$, $g \geq 0$ ve

$$G(t) := \int_{\alpha}^t g + a, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

olsun. $a = G(\alpha)$, $b = G(\beta)$ olsun. Her $f \in L^1([a, b])$ için

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ G) g = \int_{\alpha}^{\beta} f(G(t)) g(t)dt. \quad (3.87)$$

Kanıt. Birinci Anateoreminden dolayı G süreklidir ve $g \geq 0$ olduğu içinse $[a, b]$ 'deki her değeri en az bir kez alır.

(1) $a \leq a_1 \leq b_1 \leq b$, $I = [a_1, b_1]$ ve $f = \mathbf{1}_I$ olsun. $G^{-1}(I)$, $\alpha \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta$ olmak üzere $[\alpha_1, \beta_1]$ tipinde bir aralıktır. Bu durumda (3.87) geçerlidir:

$$\int_a^b \mathbf{1}_I = b_1 - a_1 = G(\beta_1) - G(\alpha_1) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} g = \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{1}_I \circ G) g.$$

(2) (1)'den dolayı savımız f bir merdiven fonksiyonu olduğunda da doğrudur.

(3) Şimdi $f \geq 0$ olsun. $\varphi_k \geq 0$ sonlu merdiven fonksiyonlarını bir S sıfır kümesi dışında $\varphi_k(x) \nearrow f(x)$ olacak biçimde seçebiliriz. Bir T kümesini $T := \{t \in [\alpha, \beta] \mid g(t) \neq 0, G(t) \in S\}$ şeklinde tanımlayalım. Aşağıda

T 'nin bir sıfır kümesi olduğunu kanıtlayacağız; şimdilik bunu kabullenelim. O zaman $((\varphi_k(G(t))g(t)) \subset L^1([\alpha, \beta])$ monoton artandır ve her $t \notin T$ için $f(G(t))g(t)$ 'ye yakınsar. Sav Monoton Yakınsaklık Teoremi ve φ_k için yazılmış (3.87)'den çıkar.

Şimdi T 'nin sıfır kümesi olduğunu görelim. S bir sıfır kümesi olduğundan, monoton artan (ψ_k) sonlu basamaklı merdiven fonksiyonları, S 'de ıraksak ve integralleri sınırlı olacak biçimde bulunabilir (örneğin $\psi_k \equiv k$). (3.87)'yi ψ_k için yazarsak Monoton Yakınsaklık Teoreminden $((\psi_k(G(t))g(t))$ dizisinin $[\alpha, \beta]$ 'da hhy yakınsaklığını elde ederiz, dd ıraksak olduğu noktalar bir sıfır kümesi oluşturur. Bu dizi T 'de ıraksak olduğundan T bir sıfır kümesidir.

(4) Herhangi bir $f \in L^1([a, b])$ için, sav $f^\pm$ 'ler için doğru ve integral doğrusal olduğundan f için de doğrudur. ■

Teorem 3.6.20'yi $g \leq 0$ için ifade etmeyi okura bırakıyoruz.

Not 3.6.21 Newton İntegrali: Newton bir fizikçi olarak bazı fiziksel büyüklüklerin zamana göre değişimleriyle de ilgilenmiştir. Onun için bir cismin ivmesini (=hızın türevini) biliyorsak hızımı, hızımı (=kat edilen yolun türevini) biliyorsam yolu bulmak temel problemlerden olmuştur. Özetle problemimiz, bir fonksiyonun türevini biliyorsam kendisini bulmaktır, dd **ilkel problem**dir.

$-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ve $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin. Bir $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, her $x \in (a, b)$ için $F'(x)$ var ve $F'(x) = f(x)$ ise f 'nin (a, b) 'de bir karşıtürevi (veya ilkeli) demiştik. F , f 'nin bir karşıtürevi ise her $c \in \mathbb{R}$ için $F + c$ 'de f 'nin bir karşı türevidir. F , f 'nin bir karşıtürevi ise

$$N \int_a^b f := \lim_{x \nearrow b} F(b) - \lim_{x \searrow a} F(b)$$

sayısına f 'nin (a, b) 'deki **Newton integrali** denir. Bu tanım F karşıtürev fonksiyonunun seçiminden bağımsızdır. Newton integralinin tanımında, Riemann integralinin tanımındaki iki kısıtlama yoktur: (a, b) aralığının sınırlı olması ve f fonksiyonunun sınırlı olması gerekmez.

Teorem: $[a, b]$ sınırlı aralık ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ise f fonksiyonu (a, b) 'de hem Newton hem de Riemann integrallenebilir ve $N \int_a^b f = \int_a^b f dj_1$.

Şimdi $f(x) := x^2 \cos \frac{\pi}{x^2}$, $0 < x \leq 1$ ve $f(0) := 0$ olsun.

$$f'(x) = 2x \cos \frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x^2} \quad (0 < x \leq 1) \text{ ve } f'(0) = 0.$$

f' fonksiyonu $(0, 1)$ 'de Newton integrallenebilir; sınırlı olmadığı için Riemann integrallenebilir! Şimdi f' 'nin Lebesgue integrallenebilir olduğunu görelim. $0 < a < b < 1$ için f' fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, dolayısıyla Riemann integrallenebilir ve

$$\int_a^b f' dj_1 = \int_a^b f' d\lambda_1 = \cos \frac{\pi}{b^2} - \cos \frac{\pi}{a^2}.$$

$k \in \mathbb{N}^*$ için $a_k = \sqrt{2/(4k+1)}$, $b_k = 1/2k$ olsun. $[a_k, b_k]$ aralıkları ayrık ve $\int_{a_k}^{b_k} f' d\lambda_1 = 1/2k$ olduğundan

$$\int_0^1 |f'| d\lambda_1 \geq \sum_{k \geq 1} \int_{a_k}^{b_k} |f'| d\lambda_1 = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k} = +\infty$$

olur. Sonuçta $|f'|$, $[0, 1]$ 'de *Lebesgue integrallenemez*; dolayısıyla f' de *Lebesgue integrallenemez*.

Bir $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun, bu aralıkta bir Newton integralinden söz edebilmemiz için, her şeyden önce f 'nin bir F fonksiyonunun türevi olması gerekir. Hangi f 'lerin bir F 'nin türevi olduğu sorusu zor bir sorudur. Ancak (a, b) 'de tanımlı $f_n(x) := \frac{1}{n} (F(x + \frac{1}{n}) - F(x))$ fonksiyonları orada sürekli dolayısıyla ölçülebilir olduklarından $f = \lim f_n$ fonksiyonu ölçülebilir olmalıdır. Ayrıca bir başka gerekli koşul biliyoruz: f bir **Darboux fonksiyonu** olmalıdır, yani her $a < \alpha < \beta < b$ için (α, β) aralığında f fonksiyonu $f(\alpha)$ ile $f(\beta)$ arasındaki her değeri alır (bkz. [13], s.13). $I = [0, 1]$ ve $A := I \cap \mathbb{Q}$ olmak üzere $\mathbf{1}_A$ 'nın Riemann integrallenemediğini biliyoruz. $\mathbf{1}_A$ bir Darboux fonksiyonu olmadığı için Newton integrallenemez. Şimdi $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(0) = 0$ ve $r \in (0, 1]$ ve $p, q \in \mathbb{N}^*$ aralarında asal olmak üzere $r = p/q$ ise $f(r) := 1/q$, eğer r bir irrasyonel sayı ise $f(r) = 0$ olarak açıklansın (**Riemann fonksiyonu**). f fonksiyonu I 'daki irrasyonel noktalarda sürekli olduğundan *Riemann integrallenebilir*, ancak bir Darboux fonksiyonu olmadığından *Newton integrallenemez*! Bu kısa açıklamalarla bu üç integral kavramının farklı olduklarını vurguladık. Bu konuyu izleyen kısımda yeniden ele alacağız. ▲

Bölüm 4

İntegrale Farklı Yaklaşımlar

Daha önceki üç bölümde $\mathbb{R}^n$ 'de Riemann ve Lebesgue integrallerini ele aldık. Her iki integrale de farklı yaklaşabileceğimizi gördük. Bir yandan bu kavramların bazı genelleştirmelerine, diğer yandan integrale farklı yaklaşımlara yer vereceğiz. Örneğin $\mathbb{R}^n$ yerine herhangi bir X kümesi alırsak ne yapabiliriz? Diğer yandan $\mathbb{R}^n$ yerel kompakt bir metrik uzaydır. $\mathbb{R}^n$ yerine herhangi bir yerel kompakt metrik uzay alabilir miyiz? Veya Riemann ve Lebesgue integrallerinin sahip olmadığı bir özelliği öne çıkarıp, bu özelliği olan, integral benzeri bir kavram açıklayabilir miyiz? Bu bölüm bir bilgilendirme bölümü olduğu için dillendirilen önermelerinin kanıtı verilmeyecektir.

$A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan ölçülebilir ise $\mathcal{R}(A)$ bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayıdır ve her $f, g \in \mathcal{R}(A)$ için $f \vee g := \max\{f, g\} \in \mathcal{R}(A)$ ve $f \wedge g := \min\{f, g\} \in \mathcal{R}(A)$ (**kafes özelliği**). $\int_A f$ ile f 'nin Riemann integralini göstermek üzere $\int_A : \mathcal{R}(A) \rightarrow \mathbb{R}$ *doğrusal* ve **monotondur**, dd $f \geq 0$ ise $\int_A f \geq 0$.

4.1 (Riemann-)Stieltjes İntegrali

Uzlaşma: Bu kısımda $a, b \in \mathbb{R}$ ve $I = [a, b]$ olmak üzere $f, g, \dots, \varphi, \psi, \dots$ fonksiyonlarımız daima I 'da tanımlı ve $\mathbb{R}$ değerli olacaklardır. Ayrıca I 'nın bir $\mathcal{Z}$ parçalanışından söz ettiğimizde bu $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ noktalarının belirlediği bir parçalanış olacaktır. $I_k = \langle x_{k-1}, x_k \rangle$ olmak üzere $\mathcal{Z}$ parçalanışını $\{I_k\}$ ile gösterelim. Daha önce de olduğu gibi $\xi_k \in I_k$ noktalarını seçmişsek, bunu $\mathcal{Z}(\xi)$ olarak göstereceğiz. Bu tür parçalanışların ailesini $\mathfrak{Z}_{<}^*(I)$ veya kısaca $\mathfrak{Z}_{<}^*$ ile gösterelim.

$f, \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonlar ve $\mathcal{Z}(\xi)$ ise I 'nın bir parçalanışı olsun.

$$S(f, \varphi, \mathcal{Z}(\xi)) := \sum_i f(\xi_i) (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) \quad (4.1)$$

toplamına f fonksiyonunun $\varphi, \mathcal{Z}(\xi)$ 'ye göre **Stieltjes toplamı** denir. Eğer $\lim_{\|\mathcal{Z}\| \rightarrow 0} S(f, \varphi, \mathcal{Z}(\xi))$ varsa f **fonksiyonu I 'da φ 'ye göre (Riemann-) Stieltjes integrallenebilir** ve

$$I_{\varphi}(f) \equiv \int_I f d\varphi \equiv \int_a^b f(x) d\varphi(x) \equiv \int_a^b f d\varphi := \lim_{\|\mathcal{Z}\| \rightarrow 0} S(f, \varphi, \mathcal{Z}(\xi))$$

limitine, f 'nin I 'da φ 'ye göre (Riemann-) Stieltjes integrali denir. (Riemann-)Stieltjes yerine kısaca Stieltjes diyeceğiz. Tıpkı Riemann integralinde olduğu gibi bu, $\|\mathcal{Z}_n\| \rightarrow 0$ koşulunu sağlayan her $(\mathcal{Z}_n(\xi))$ parçalanmış dizisi için $(S(f, \varphi, \mathcal{Z}_n(\xi)))$ dizisinin aynı α gerçel sayısına yakınsak olması demektir; bu durumda $\alpha = \int_a^b f d\varphi$.

I 'da φ 'ye göre Stieltjes integrallenebilen f fonksiyonlarının kümesini $\mathcal{S}(\varphi, I)$ ile gösterelim.

$\varphi(x) \equiv x$ ise $S(f, \varphi, \mathcal{Z}(\xi))$ toplamı $R(f, \mathcal{Z}(\xi))$ toplamına eşit olduğundan f 'nin Riemann integrallenebilir olması f 'nin I 'da φ 'ye göre Stieltjes integrallenebilir olmasına denktir. Stieltjes integrali Riemann integralini özel hal olarak içerir.

Teorem 4.1.1 *Aşağıdaki önermeler geçerlidir:*

(i) $f \in \mathcal{S}(\varphi, I)$ ise her $c \in \mathbb{R}$ için $cf \in \mathcal{S}(\varphi, I)$, $f \in \mathcal{S}(c\varphi, I)$ ve

$$\int_a^b cf d\varphi = \int_a^b f d(c\varphi) = c \int_a^b f d\varphi.$$

(ii) $f, g \in \mathcal{S}(\varphi, I)$ ise $f + g \in \mathcal{S}(\varphi, I)$ ve

$$\int_a^b (f + g) d\varphi = \int_a^b f d\varphi + \int_a^b g d\varphi.$$

(iii) $f \in \mathcal{S}(\varphi, I)$ ve $f \in \mathcal{S}(\psi, I)$ ise $f \in \mathcal{S}(\varphi + \psi, I)$ ve

$$\int_a^b f d(\varphi + \psi) = \int_a^b f d\varphi + \int_a^b f d\psi.$$

(iv) $f \in \mathcal{S}(\varphi, I)$ ve $a < c < b$ ise $f \in \mathcal{S}(\varphi, [a, c])$, $f \in \mathcal{S}(\varphi, [c, d])$ ve

$$\int_a^b f d\varphi = \int_a^c f d\varphi + \int_c^b f d\varphi.$$

Teorem 4.1.2 (Kısmi integrasyon) $f \in \mathcal{S}(\varphi, I)$ ise $\varphi \in \mathcal{S}(f, I)$ ve

$$\int_a^b f d\varphi = [f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)] - \int_a^b \varphi df.$$

Doğrudan tanımdan aşağıdaki teorem kazanılır.

Teorem 4.1.3 (Değişken Değişimi) $f, \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ sürekli ve kesin artan olsun. $f \in \mathcal{S}(\varphi, [a, b])$ olması için gerek ve yeter koşul $f \circ \psi \in \mathcal{S}(\varphi \circ \psi, [\alpha, \beta])$ olmasıdır ve bu durumda

$$\int_a^b f d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \psi) d(\varphi \circ \psi).$$

f sürekli ve $\varphi \in \mathcal{C}^1$ ise Ortalama Değer Teoremi'nden $\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = \varphi'(\xi'_i)(x_i - x_{i-1})$ olduğundan

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx.$$

Bir kez daha Stieltjes integrali (sol yan) Riemann integrali (sağ yan) buluştu.

Teorem 4.1.4 $f, \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f sınırlı ve φ sınırlı değişimli olsun. Aşağıdaki koşullardan her biri $\int_a^b f d\varphi$ integralinin varlığı için gerek ve yeterlidir:

- (i) Her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı $\|\mathcal{Z}\| < \delta_\varepsilon$ koşulunu sağlayan, $[a, b]$ 'nin her $\mathcal{Z} = \{I_i\}$ parçalanışı için

$$\sum_i \text{sl}(f, I_i) |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| \leq \varepsilon$$

olacak biçimde bulunabilir.

- (ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı $\|\mathcal{Z}\| < \delta_\varepsilon$ koşulunu sağlayan, $[a, b]$ 'nin her $\mathcal{Z} = \{I_i\}$ parçalanışı için

$$\sum_i \text{sl}(f, I_i) V_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi \leq \varepsilon$$

olacak biçimde bulunabilir.

Dolayısıyla Stieltjes integralinde sınırlı değişimli fonksiyonlar önemlidir.

Teorem 4.1.5 $f, \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f sınırlı ve φ mutlak sürekli ise

$$\int_a^b f d\varphi = \int_a^b f \varphi' d\lambda_1.$$

Bu teoremden ise Stieltjes integrali ve Lebesgue integrali buluşur.

Özel durum: φ monoton artarsa $I_\varphi : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ doğrusal ve monoton artandır. Riesz, her monoton doğrusal $L : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünün bu tipten olduğunu, dd bir sınırlı monoton artan φ ile $L = I_\varphi$ olduğunu kanıtlamıştır.

4.2 Ölçüsel Yaklaşım

Bu kısımdaki yaklaşım, olasılık ve komşu alanlarla ilgilenenlerin yeğlediği yaklaşımdır.

$X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olsun. $\mathbb{R}^n$ 'deki Lebesgue integralini X 'te bir Lebesgue integraline taşıyacağız. Burada $\mathbb{R}^n$ 'nin, bir küme olmak dışında diğer özelliklerini, örneğin topolojik özelliklerini kullanmaktan sakınacağız.

$\emptyset \neq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}(X)$ bir σ -cebiri olsun, dd her $A \in \mathfrak{M}$ için $A^c \in \mathfrak{M}$ ve her sayılabilir $\{A_i\} \subset \mathfrak{M}$ için $\bigcup A_i \in \mathfrak{M}$. $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ bir ölçü olsun, dd $\mu(\emptyset) = 0$ ve her sayılabilir ve ayrık $\{A_i\} \subset \mathfrak{M}$ ailesi için $\mu(\bigsqcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$. Bu durumda $(X, \mathfrak{M})$ ikilisine bir **ölçülebilir** uzay ve $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ üçlüsüne ise bir **ölçü uzayı** denir. $\mu(X) = 1$ ise $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 'ye bir **olasılık uzayı** denir. Biz kitabımızda $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda_n)$ ölçü uzayında çalıştık; burada yaptıklarımızı, olabildiğince $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 'ye aktaracağız. $S \subset X$ ve $\mu(S) = 0$ ise S 'ye bir **μ -sıfır kümesi** denir. Her $x \in X$ için bir $\Phi(x)$ önermesi verilsin. $S \subset X$ bir μ -sıfır kümesi olmak üzere her $x \in X \setminus S$ için $\Phi(x)$ doğru ise $\Phi(x)$, X 'te **μ -hemen her yerde** veya **μ -hhy geçerlidir** diyeceğiz.

Bir $\mu^* : \mathfrak{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ dönüşümüne, $\mu^*(\emptyset) = 0$ ve sayılabilir alttoplamsalsa, dd

$$\text{her sayılabilir } \{A_i\} \subset \mathfrak{P}(X) \text{ için } \mu^*\left(\bigcup A_i\right) \leq \sum \mu^*(A_i)$$

ise X 'te bir **dış ölçüdür** denir. μ^* bir dış ölçü ise

$$\mathfrak{M}_\mu := \{A \subset X \mid \forall E \subset X (\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A))\}$$

ailesi bir σ -cebiridir ve $\mu := \mu^*|_{\mathfrak{M}_\mu}$ bir σ -ölçüsüdür.

Bir $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, $f(X) = \{a_i\}_{i \in I}$, I sayılabilir ve her $A_i := f^{-1}(a_i) \in \mathfrak{M}$ ise bir $\mathfrak{M}$ -merdiveni diyelim ve bu merdivenlerin kümesini $\mathcal{M}_\mu$ ile gösterelim. Bu durumda $f = \sum_i a_i \mathbf{1}_{A_i}$. Eğer I sonlu ise f 'ye sonlu basamaklı diyelim ve sonlu basamaklı merdiven fonksiyonlarının kümesini $\mathcal{M}_{s\mu}$ ile gösterelim. Biz $\mathbb{R}^n$ 'de $\mathcal{M}_{\lambda_n}$ ile çalıştık. Burada genel yaklaşıma uyarak $\mathcal{M}_{s\mu}$ ile çalışacağız. $\mathcal{M}_{s\mu}$ bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayıdır. $\mathcal{M}_{s\mu}^+ := \{f \in \mathcal{M}_{s\mu} \mid \mu\text{-hhy } f \geq 0\}$ olsun.

Bir $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna ava her $A \in \bar{\mathcal{B}}^1$ için $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$ ise $\mathfrak{M} - \bar{\mathcal{B}}^1$ **ölçülebilir** veya yalın olarak **ölçülebilir** diyelim. Alt kısım 3.3.2'deki tüm savlar, son üçü hariç dd önsavlar 3.3.22, 3.3.23 ve Teorem 3.3.24 hariç şimdi de geçerlidirler.

$\varphi = \sum_i a_i \mathbf{1}_{A_i} \in \mathcal{M}_{s\mu}$ olmak üzere $I(\varphi) := \sum_i a_i \mu(A_i)$ olarak açıklansın. $I(\varphi)$ iyi tanımlıdır ve $I : \mathcal{M}_{s\mu} \rightarrow \mathbb{R}$ bir doğrusal dönüşümdür. Aslında I 'yı $\mathcal{M}_{s\mu}^+$ 'de bilmek yeterlidir. $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_{s\mu}^+$ ve $\mu\text{-hhy } \varphi(x) \leq \psi(x)$ ise $I(\varphi) \leq I(\psi)$.

Tanım 4.2.1 $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ fonksiyonu μ -ölçülebilir olsun.

(i) $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ ise

$$\int f d\mu := \sup \{ I(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{M}_{s\mu}^+ \text{ ve } \mu\text{-hhy } \varphi \leq f \}.$$

(ii) $\int f^+ d\mu$ ve $\int f^- d\mu$ 'nin ikisi birden $\{\pm\infty\}$ 'de değilse

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \bar{\mathbb{R}}.$$

(iii) f fonksiyonu (μ -) **Lebesgue integrallenebilir** ava

$$\int f d\mu \in \mathbb{R} \left(\Longleftrightarrow \int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < +\infty \right).$$

$$L_\mu \equiv L_\mu(X) := \{ f \mid f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ } \mu\text{-Lebesgue integrallenebilir} \}.$$

Her $\varphi \in \mathcal{M}_{s\mu}^+$ için $I(\varphi) = \int f d\mu$ olduğu aşıkardır. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda_n)$ 'de öğrendiğimiz çoğu temel teoremler olduğu gibi, benzer kanıtlarla $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 'ye aktarılır.

Önerme 4.2.2 (Doğrusallık) μ -ölçülebilir $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ fonksiyonlarının integralleri tanımlı olsun.

(i) Her $a \in \mathbb{R}$ için $\int (af) d\mu = a \int f d\mu$.

(ii) $\int f d\mu + \int g d\mu$ toplamı $\bar{\mathbb{R}}$ 'de tanımlı ise, gerekirse bir μ -sıfır kümesinde f ve g 'nin değerlerinde değişiklik yaparak, $f+g$ tanımlı hale getirilebilir ve $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

Özellikle $L_\mu(X)$ bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayıdır ve $\int : L_\mu \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \rightarrow \int f d\mu)$ dönüşümü doğrusaldır.

Önerme 4.2.3 (Monotonluk) $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ fonksiyonları μ -ölçülebilir ve μ hhy $f \leq g$ olsun. $-\infty < \int f d\mu$ ise $\int g d\mu$ de tanımlıdır ve $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Teorem 4.2.4 (Monoton Yakınsaklık Teoremi, B. Levi) $f_k : X \rightarrow [0, +\infty]$ ($k \in \mathbb{N}$) fonksiyonları μ -ölçülebilir ve $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ ve $f := \lim f_k$ ise

$$\int f d\mu \equiv \int \left(\lim_k f_k \right) d\mu = \lim_k \int f_k d\mu.$$

Yine f μ -ölçülebilir ve $E \in \mathfrak{M}$ ise

$$\int_E f d\mu := \int (f \cdot \mathbf{1}_E) d\mu$$

olarak açıklanır.

$f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ μ -ölçülebilir olsun. $\int f d\mu$ tanımlı ise $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$; ayrıca $f \in L_\mu \Longleftrightarrow |f| \in L_\mu$.

Önerme 4.2.5 (Majör Ölçütü) $g : X \rightarrow [0, +\infty]$ integrallenebilir ve ölçülebilir $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ile μ -hhy $|f| \leq g$ ise $f \in L_\mu$.

Lemma 4.2.6 (Fatou Önsavı) Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : X \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu μ -ölçülebilirse

$$\int (\liminf f_k) d\mu \leq \liminf \int f_k d\mu.$$

Teorem 4.2.7 (Lebesgue Sınırlandırılmış Yakınsaklık Teoremi) Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ fonksiyonu μ -ölçülebilir ve μ -hhy $f(x) := \lim f_k(x)$ olsun. Integrallenebilir bir $g : X \rightarrow [0, +\infty]$ ile μ -hhy $\sup |f_k(x)| \leq g$ ise f de integrallenebilir ve

$$\int f d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k d\mu.$$

Ayrıca $\|f - f_k\|_{L^1(\mu)} := \int |f - f_k| d\mu \rightarrow 0$.

4.3 Fonksiyonel Yaklaşım

Bu kısımda ele alacağımız yaklaşım, Radon, Daniell, Stone... yaklaşımlarıdır. Bazen ilgilendiğimiz bir alandaki bazı özelliklere odaklanıp, bu özelliklere sahip daha genel yapılarda neler yapabileceğimizi araştırırız. $Q \subset \mathbb{R}^n$ bir kapalı kutu olsun. $\mathcal{C}(Q)$ 'nin şu özelliklerine odaklanacağız: $\mathcal{C}(Q)$ bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayıdır ve bir kafestir, dd $f, g \in \mathcal{C}(Q)$ ise $f \wedge g, f \vee g \in \mathcal{C}(Q)$. Diğer yandan $\int_Q : \mathcal{C}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ ($f \rightsquigarrow \int_Q f dj_n$) dönüşümü doğrusaldır, pozitifdir¹ dd $f \geq 0$ ise $\int_Q f \geq 0$ ve Daniell özelliğine sahiptir, dd:

Daniell Özelliği: $(f_k) \subset \mathcal{C}(Q)$ ve $f_k \searrow 0$ ise $\int_Q f_k dj_n \searrow 0$.

Bu Dini Teoremi ve Teorem 2.3.28'in bir sonucudur.²

Şimdi $X \neq \emptyset$, $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}(X, \mathbb{R}) := \{f|f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı}\}$ bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayı ve $\mathcal{E}$ ayrıca bir kafes olsun. $\mathbb{R}$ -doğrusal, monoton bir $I : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne, ayrıca Daniell Özelliği'ne sahipse, dd $f_k \searrow 0$ koşulunu sağlayan her $(f_k) \subset \mathcal{E}$ dizisi için $I(f_k) \searrow 0$ ise $\mathcal{E}$ 'de bir **integral** denir. Daniell Özelliği aşağıdaki önermelerden her birine denktir:

¹Pozitiflik monoton artanhğa denktir, dd " $\int_Q$ monotondur $\iff$ Her $f, g \in \mathcal{C}(Q)$ için $f \leq g$ ise $\int_Q f \leq \int_Q g$ ".

²**Dini Teoremi:** X bir kompakt uzay, $(f_k) \subset \mathcal{C}(X)$ ve $f_k \searrow 0$ ise $f_k \xrightarrow{X} 0$.

- (i) $\varphi \in \mathcal{E}$, $(\varphi_k) \subset \mathcal{E}$ monoton artan ve $\varphi \leq \lim \varphi_k$ ise $I(\varphi) \leq \lim I(\varphi_k)$.
(ii) $\varphi \in \mathcal{E}$, $(\varphi_k) \subset \mathcal{E}$, $\varphi_k \geq 0$ ve $\varphi \leq \sum_k \varphi_k$ ise $I(\varphi) \leq \sum_k I(\varphi_k)$.

Örnek 4.3.1. (a) $Q \in \mathcal{Q}^n$ bir kapalı kutu, $I(f) := \int_Q f dj_n$ olmak üzere $I, \mathcal{C}(Q)$ 'de bir integraldir.

(b) $Q \in \mathcal{Q}^n$ herhangi bir kutu ve $\mathfrak{P}_k(Q)$ ile Q 'nın sonlu kutulara parçalanışlarının kümesini gösterelim. $\mathcal{E}$ şimdi, basamakları $\mathfrak{P}_k(Q)$ 'da olan sonlu basamaklı merdiven fonksiyonlarının kümesi olsun. Her $\varphi = \sum_i a_i \mathbf{1}_{Q_i}$ için $I(\varphi) := \int_Q \varphi dj_n = \sum_i a_i j_n(Q_i)$ olarak açıklansın. $\mathcal{E}$ bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayı, aynı zamanda bir kafestir. $I : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ bir integraldir; yaklaşımımız gereği gereksinim duymadığımız için, kanıtlamadığımız tek özellik Daniell Özelliği'dir. Bunun kanıtını [39], s34'te bulabilirsiniz.

(c) $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ve $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $I_\varphi(f) := \int_a^b f d\varphi$ ile $\mathcal{E}$ 'de bir integral tanımlanır.

(d) $\mathcal{E} := \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) := \{f \mid f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ ve } \text{des } f \text{ kompakt}\}$ olsun; burada geçen $\text{des } f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ kümesine f 'nin desteği denir. $I(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f dj_n$ ile açıklanan $I : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü bir integraldir.

(e) X yerel kompakt bir topolojik uzay ve $\mathcal{C}_0(X)$ ise X 'teki kompakt destekli, $\mathbb{R}$ -değerli sürekli fonksiyonların uzayı olsun. Her doğrusal ve monoton $I : \mathcal{C}_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne X 'te bir **Radon integrali** denir. Her Radon integrali Daniell Özelliği'ni sağlar, dolayısıyla yukarıdaki anlamda bir integraldir.

Şimdi $X \neq \emptyset$, $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}(X, \mathbb{R}) := \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı}\}$ olmak üzere bir $I : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ integrali verilsin. $\mathcal{E}$ 'nin öğelerine **elementar fonksiyonlar** diyelim.

$$\mathcal{E}^\uparrow := \left\{ f \mid f : X \rightarrow (-\infty, +\infty], \exists (\varphi_k) \subset \mathcal{E} \text{ monoton artan ve } f = \lim_k \varphi_k \right\}$$

olsun. $f, g \in \mathcal{E}^\uparrow$ ve $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ ise $f + g, \alpha f, f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{E}^\uparrow$. Şimdi $\varphi_k, \psi_k \in \mathcal{E}$ olmak üzere $\varphi_k \nearrow f$ ve $\psi_k \nearrow f$ ise Daniell Özelliği'nden dolayı $\lim I(\varphi_k) = \lim I(\psi_k)$ olur. Dolayısıyla

$$\hat{I}(f) \equiv \hat{I}(\lim \varphi_k) := \lim I(\varphi_k)$$

tanımı kusursuzdur. $\varphi \in \mathcal{E}$ ise her k için $\varphi_k = \varphi$ alırsak $\varphi_k \nearrow \varphi$ ve $\hat{I}(\varphi) = I(\varphi)$ olur. Özetle $\hat{I}$ dönüşümü I 'yı $\mathcal{E}^\uparrow$ 'ya genişletir. $\mathcal{E}^\uparrow$ monoton artan limitlere göre kapalıdır, dd $(f_k) \subset \mathcal{E}^\uparrow$ monoton artarsa $\lim f_k \in \mathcal{E}^\uparrow$ ve ayrıca, $f, g \in \mathcal{E}^\uparrow$ ve $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ ise

$$\hat{I}(f + g) = \hat{I}(f) + \hat{I}(g) \text{ ve } \hat{I}(\alpha f) = \alpha \hat{I}(f). \quad (4.2)$$

Benzer biçimde

$$\mathcal{E}^\downarrow := \left\{ f \mid f : X \rightarrow [-\infty, +\infty), \exists (\varphi_k) \subset \mathcal{E} \text{ monoton azalan ve } f = \lim_k \varphi_k \right\}$$

olarak tanımlanır. Benzer biçimde $(\psi_k) \subset \mathcal{E}^\downarrow$ ve $\psi_k \searrow g$ ise $\hat{I}(g) := \lim I(\psi_k)$. (4.2) eşitlikleri $f, g \in \mathcal{E}^\downarrow$ ve $\alpha \leq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ olduğunda da doğrudur. Ayrıca $\mathcal{E}^\downarrow = -\mathcal{E}^\uparrow$, $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^\downarrow$ ve $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^\uparrow$ olduğu apaçaktır.

Bir $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $h \in \mathcal{E}^\downarrow$ ve bir $g \in \mathcal{E}^\uparrow$ fonksiyonu $g \leq f \leq h$ ve $\hat{I}(h) - \hat{I}(g) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabiliyorsa **I -integrallenebilir** denir. I -integrallenebilir fonksiyonların kümesini $\mathcal{E}_1$ ile gösterelim. Her $f \in \mathcal{E}_1$ için

$$\sup \left\{ \hat{I}(g) \mid g \leq f \text{ ve } g \in \mathcal{E}^\downarrow \right\} = \inf \left\{ \hat{I}(h) \mid f \leq h \text{ ve } h \in \mathcal{E}^\uparrow \right\}.$$

Bu ortak değere $I_1(f)$ diyelim. $I_1, \hat{I}$ 'nın bir genişlemesidir. Aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem $(f_k) \subset \mathcal{E}_1, f_k \nearrow f$ ve $\lim I_1(f_k) < +\infty$ ise $f \in \mathcal{E}_1$ ve $I_1(f) = \lim I_1(f_k)$.

$(\mathcal{E}_1, I_1)$ ikilisi $(\mathcal{E}, I)$ ikilisinin özelliklerine sahiptir. $\mathcal{E}_1$ bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayı, aynı zamanda bir kafes, $I_1 : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ise $\mathbb{R}$ -doğrusal, monoton ve Daniell Özelliği'ne sahiptir.

Her $I : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ integrali bizi doğal biçimde X 'te bir $\mathfrak{M}_I$ σ -cebiri bir $\mu_I : \mathfrak{M}_I \rightarrow [0, +\infty]$ ölçüsüne götürür. Bu bir bilgilendirme bölümü olduğu için ayrıntıya girmiyoruz. Ancak okur biz söylemeden de $A \subset X$ için $A \in \mathfrak{M}_I \iff \mathbf{1}_A \in \mathcal{E}_1$ olduğunu ve bu durumda $\mu_I(A) = I_1(\mathbf{1}_A)$ olması gerektiğini biliyordur.

Örnek 4.3.1'de (a) ve (b) için $\mathcal{E}_1 = \mathcal{L}(Q)$ ve $I_1(f) = \int_Q f d\lambda_n$ olur. (c) ise $[a, b]$ 'de Lebesgue-Stieltjes integrallenebilir fonksiyonlara götürür ve bu durumda $I_1(f) = \int_a^b f d\varphi$ olur. (d) bizi $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ 'e götürür ve $I_1(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n$ olur.

Radon integralini ilk kez ayrıntılı olarak ele alan Bourbaki grubu olmuştur. Radon integralinde, X yerel kompakt bir topolojik uzay olmak üzere elementar fonksiyonlarımız $\mathcal{E} = \mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ alınmıştır. Bu çok özel bir durumdur. Yine de Kakutani (1941) bunun böyle olmadığını, her $(\mathcal{E}, I)$ integraline bir Radon integrali gözü ile bakabileceğimizi kanıtlamıştır. Kakutani'nin kanıtı bazı dezavantajlara sahiptir, 1957'de Bauer daha yalın bir kanıt vermiştir. Teorem özetle şunu söyler: Her $(\mathcal{E}, I)$ integraline karşılık yerel kompakt bir X_I topolojik uzayı ve bir $J : \mathcal{C}_0(X_I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ integrali eşyapılı olacak biçimde bulunabilir. Bundan kastedilense yukarıdaki yöntemle $(\mathcal{E}, I) \rightsquigarrow (L_1, I_1)$ ve $(\mathcal{C}_0(X_I, \mathbb{R}), J) \rightsquigarrow (L_1^*, J_1)$ geçişleri yapıldığında L_1 ve L_1^* vektör uzayları arasında bir $\Phi : L_1 \xrightarrow{\sim} L_1^*$ eşyapı dönüşümünün her $f \in L_1$ için $I_1(f) = J_1(\Phi(f))$ olacak biçimde bulunabilmesidir.

4.4 Kurzweil-Henstock İntegrali

Not. Lebesgue integralinin, bütün artılara karşın iki eksiği vardır. f 'nin Lebesgue integrallenebilir olması için gvyk $|f|$ 'nin Lebesgue integrallenebilir

olmasıdır. Bu epeyce kısıtlayıcı bir özelliktir. Bu nedenle özdeş integralin gerisine düşer. Örneğin Örnek 2.8.13'te $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun $(0, +\infty)$ 'da özdeş integrallenebilir olduğunu gösterdik. Fakat $\int_0^{+\infty} |f| dx = +\infty$ olduğundan f fonksiyonu $(0, +\infty)$ 'da Lebesgue integrallenemez! Ancak pratikte bu tür integrallerle karşılaşırız. İkinci eksiği ise ilkel probleminde bir tam çözüm getirememiş olmasıdır. Lebesgue bunların bilincindeydi. Bu eksiği gidermek için Denjoy (1912), Perron (1914) ilkel problemini sınırlı türevler için çözen yeni integral kavramları geliştirdiler; ancak bunlar Lebesgue integralinin gördüğü ilgiyi görmediler. Sonradan bu iki kavramın denkliği kanıtlandı.

Biz Riemann integralini bazı sınırlı kümelerde tanımlı sınırlı fonksiyonlara ilişkin bazı sonlu toplamların limiti olarak açıkladık. Lebesgue integralini ise sınırlı olması gerekmeyen bazı kümelerde tanımlı, sınırlı olması gerekmeyen bazı fonksiyonlara ilişkin bazı sayılabilir toplamların limiti olarak açıkladık. Özetle Lebesgue integrali Riemann integraline matematiksel mantığı olan bir dokunuştur. 1950'li yılların sonundan başlamak üzere matematik bölümlerinde Riemann integrali yerini Lebesgue integraline bırakmaya başlamıştır. Ancak 1957'de Kurzweil, 1961'de Henstock Riemann integraline, yine matematiksel mantığı olan bir dokunuşla, Lebesgue integralini de kapsayan ve Lebesgue integralinin yukarıda bahsettiğimiz iki eksiği de olmayan bir integral tanımına ulaştılar. Bu dokunuş integralini alacağımız fonksiyonların yerel davranışlarını gözetmek olacaktır. Örneğin $0 < a < 1 < b$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ olsun. $\mathcal{Z} = \{I_1, \dots, I_n\}$, $[a, b]$ aralığın, girişimsiz kapalı aralıklarla bir parçalanışı olsun. $\xi = (\xi_i)$, $\eta = (\eta_i)$ ve $\xi_i, \eta_i \in I_i$ olmak üzere $\mathcal{R}(f, \mathcal{Z}(\xi))$ ve $\mathcal{R}(f, \mathcal{Z}(\eta))$ Riemann toplamlarının birbirine yakın olması için f 'nin I_i 'deki salınımlarının küçük olması gerekir. Bunu sağlamak içinse, fonksiyonumuzun kendisi bizi, I_i aralığının uzunluğunu, bu aralık a noktasına yaklaştıkça küçültmeye zorluyor! Bunu gözetecek ve bu tür parçalanışlarla çalışacağız. ▲

Uzlaşma: Bu kısımda I daima $\mathbb{R}$ 'de $[a, b]$ kapalı aralığını gösterecektir.

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralığı verilsin. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ve $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere I 'nın girişimsiz $\mathcal{Z} = \{I_1, \dots, I_n\}$ parçalanışlarıyla çalışacağız. $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bu aralıkta türevlenebilir ve $F' = f$ olsun. F de $F' = f$ de *sınırsız olabilir!* Biz f için bir $K \int_a^b f$ integralini $F(b) - F(a) = K \int_a^b f$ olacak biçimde tanımlamak istiyoruz. I 'nın herhangi bir $\mathcal{Z} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ parçalanışı verilsin. Bu durumda Ortalama Değer Teoremi ile ξ_i 'ler $a_{i-1} < \xi_i < a_i$ ve $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

olacak biçimde vardır, dolayısıyla

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) = R(f, \mathcal{Z}(\xi)) \quad (4.3)$$

olur. Şimdi ξ_i 'ler Ortalama Değer Teoremi ile kazanılanlar olmasınlar; yine de

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) \approx f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \quad (4.4)$$

olduğunu biliyorsam

$$F(b) - F(a) \approx R(f, \mathcal{Z}(\xi)) \quad (4.5)$$

olacaktır. f 'nin Riemann integrallenebilir olması gerekmez; dolayısıyla bu yeni integral $\lim_{\|\mathcal{Z}\| \rightarrow 0} R(f, \mathcal{Z}(\xi))$ olarak değil farklı tanımlanmalıdır. Aradığım integral (4.5)'i sağlayan parçalanışlar üzerinden $R(f, \mathcal{Z}(\xi))$ toplamalarının limiti olmalıdır; işlerimizden biri bu tür parçalanışların varlığını kanıtlamaktır. (4.4) ise $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ için

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \approx F'(\xi) = f(\xi) \quad (4.6)$$

demektir; dd $(x_{i-1}, F(x_{i-1}))$ ve $(x_i, F(x_i))$ noktalarından geçen doğrunun eğimi, F 'nin $(\xi_i, F(\xi_i))$ noktasındaki teğetinin eğimine yakındır demektir. Burada x_{i-1} ve x_i noktaları ξ_i 'yi **çevreler** denir. Doğrudan türev tanımından aşağıdaki önsav çıkar.

Lemma 4.4.1 (Çevreleme Önsavı) $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir, $f := F'$ ve olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta_\varepsilon(\xi) > 0$ sayısı $u \leq \xi \leq v$ ve $[u, v] \subset [a, b] \cap (\xi - \delta_\varepsilon(\xi), \xi + \delta_\varepsilon(\xi))$ koşulunu sağlayan her u, v için

$$|F(v) - F(u) - f(\xi)(v - u)| \leq \varepsilon(v - u) \quad (4.7)$$

olacak biçimde vardır.

Uyarı. Burada u ve v 'nin ξ 'in *farklı* taraflarında olması önemlidir. Örneğin $x \in (0, 1]$ için $F(x) = x^2 \cos(\pi/x^2)$ ve $F(0) = 0$ olarak açıklansın. $\exists F'(0) = 0$. Ancak her ikisi de 0'ın sağında bulunan $u_n = 1/(2n + 1/2)$ ve $v_n = 1/2n$ noktaları için $(F(v_n) - F(u_n)) / (v_n - u_n) > 2$.

Burada $\delta_\varepsilon : I \rightarrow (0, +\infty)$ bir pozitif fonksiyondur; bu fonksiyonlara **ölçer**³ denir.

$$\Delta \equiv \Delta(I) := \{\delta \mid \delta : I \rightarrow (0, +\infty)\}$$

³gauge

olsun.

Bir $\mathcal{Z}(\xi)$ parçalanışını $u = x_{i-1}$, $v = x_i$ ve $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$ için (4.7) sağlanacak biçimde seçebilirsek

$$\begin{aligned} |R(f, \mathcal{Z}(\xi)) - (F(b) - F(a))| &= \left| \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (F(b) - F(a)) \right| \\ &= \left| \sum_{1 \leq i \leq n} [f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (F(x_i) - F(x_{i-1}))] \right| \leq \varepsilon(b-a) \end{aligned} \quad (4.8)$$

olur. Dolayısıyla $K \int_a^b f = F(b) - F(a) \approx R(f, \mathcal{Z}(\xi))$ olur. Bu irdelemedeki parçalanışlara bir ad vereceğiz.

Tanım 4.4.2 $\delta \in \Delta(I)$ bir ölçer ve $\mathcal{Z}(\xi) = \{I_i\}$, I 'nin bir parçalanışı olsun. Eğer $\xi_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere, daima $[x_{i-1}, x_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$ oluyor ise $\mathcal{Z}(\xi)$ parçalanışına **δ -uygun** veya **δ -ince** denir.

I 'nin kompaktlığından aşağıdaki önsav kazanılır:

Lemma 4.4.3 (Cousin) Her $\delta \in \Delta(I)$ ölçeri için δ -uygun bir $\mathcal{Z}(\xi)$ parçalanışı vardır.

Tanım 4.4.4 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı ve her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta_\varepsilon \in \Delta(I)$ ölçeri, I 'nin δ_ε -uygun her $\mathcal{Z}(\xi)$ parçalanışı için

$$|R(f, \mathcal{Z}(\xi)) - \alpha| < \varepsilon$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa f fonksiyonu I 'da (**Kurzweil**) **integrallenebilir** denir.⁴

Kurzweil integrallenebilir yerine kısaca **K-integrallenebilir** diyelim. f fonksiyonu K-integrallenebilirse tanımdaki α tek olarak belirlidir; bu durumda $K \int_a^b f = \alpha$ yazalım. α 'nın tekliğinin kanıtında Cousin Önsavı kullanılır.

Teorem 4.4.5 (Anateorem II) $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilirse $F' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu K-integrallenebilir ve

$$K \int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

⁴Yaygın adlandırma **Henstock-Kurzweil integralidir**. **Ölçer integrallenebilir** (İng: gauge integrable) adlandırması da kullanılır.

Kanıt. Doğrudan (4.8)'den çıkar. ■

Not. Tanım 4.4.4'ü, Riemann integralinin tanımıyla kıyaslayalım. $\delta > 0$ sayısı için $s_\delta : I \rightarrow (0, +\infty)$ ölçeri $s_\delta(x) \equiv \delta$ sabit ölçeri olsun. $I = [a, b]$ aralığının bir $\mathcal{Z} = \{I_i\}$ parçalanışı verilsin. $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ve $l_i = x_i - x_{i-1}$ olmak üzere $\|\mathcal{Z}\| = \max l_i$. Şimdi $\xi_i \in I_i$ nasıl seçilirse seçilsin $\|\mathcal{Z}\| < \delta$ ise $\mathcal{Z}(\xi)$ parçalanışı s_δ -uygundur. Riemann integralinin tanımında *yalnızca s_δ sabit ölçerleri kullanılır!* Bu ise fonksiyonumuzun yerel davranışlarına uygun ölçerlerle çalışmamızı önler. Örneğin $f = F'$ fonksiyonumuz için bu uygunluk çevreleme önsavındaki $\delta_\varepsilon : I \rightarrow (0, +\infty)$ ölçeriyle belirlenir. ▲

Örnek. $I = [a, b]$, $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subset I$, $k \neq l$ için $a_k \neq a_l$, $c \in \mathbb{R}^*$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ise her $x \in I \setminus A$ için $f(x) = c$ olarak açıklansın. Her k içinse $f(a_k) \neq c$ olsun. Örneğin $I = [0, 1]$, $A := I \cap \mathbb{Q}$, $f|_A := 0$ ve $c = 1$ alırsak Dirichlet fonksiyonun elde ederiz. Dolayısıyla f Riemann integrallenebilir. Ancak f Lebesgue integrallenebilir ve $\int_a^b f d\lambda_1 = c(b-a)$. Şimdi f 'nin K -integrallenebilir ve $K \int_a^b f = \int_a^b f d\lambda_1$ olduğunu görelim.

$\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. f 'ye uygun bir $\delta_\varepsilon : I \rightarrow (0, +\infty)$ ölçeri vereceğiz öyle ki δ_ε -uygun her $\mathcal{Z}(\xi)$ parçalanışı için

$$|R(f, \mathcal{Z}(\xi)) - c(b-a)| = \left| \sum_{1 \leq i \leq n} (f(\xi_i) - c)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon \quad (4.9)$$

sağlansın. Şimdi $\xi_i \in I \setminus A$ ise $(f(\xi_i) - c)(x_i - x_{i-1}) = 0$ olacağından $\delta_\varepsilon(\xi_i)$ 'nin alacağı değerin hiçbir önemi yoktur ve biz her $t \in I \setminus A$ için $\delta_\varepsilon(t) := 1$ olarak açıklıyoruz. Bir k ile $\xi_i = a_k$ ise $\delta_\varepsilon(\xi_i) = \delta_\varepsilon(a_k) := \varepsilon / |f(a_k) - c| 2^{k+2}$ olarak açıklayalım. Bu durumda $\mathcal{Z}(\xi)$ parçalanışı δ_ε -uygun ve $\xi_i = a_k$ ise $|f(\xi_i) - c|(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon / 2^{k+1}$ olur. Bir a_k en fazla $\mathcal{Z}$ 'nin iki aralığına ait olabileceğinden her δ_ε -uygun $\mathcal{Z}(\xi)$ parçalanışı için

$$|R(f, \mathcal{Z}(\xi)) - c(b-a)| < 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon / 2^{k+1} = \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu K -integrallenebilir ve $K \int_a^b f = c(b-a)$.

Önerme 4.4.6 (Cauchy Ölçütü) $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun K -integrallenebilir olması için *gvyk* her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta_\varepsilon \in \Delta(I)$ ölçerinin δ_ε -uygun her $\mathcal{Z}(\xi), \mathcal{Z}'(\xi')$ parçalanışları için

$$|R(f, \mathcal{Z}(\xi)) - R(f, \mathcal{Z}'(\xi'))| < \varepsilon$$

olacak biçimde bulunabilmesidir.

I 'da K -integrallenebilir fonksiyonların ailesini $\mathcal{K}(I)$ ile gösterirsek $\mathcal{K}(I)$ ve $K \int_a^b : \mathcal{K}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ bildik özelliklere sahiptir. $\mathcal{K}(I)$ bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayı ve aynı zamanda bir kafestir. $K \int_a^b : \mathcal{K}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ise $\mathbb{R}$ -doğrusal ve

pozitifdir. Pozitiflik özelliğinden, f ve $|f|$ 'nin her ikisi de K -integrallenebilirse $\left| K \int_a^b f \right| \leq K \int_a^b |f|$. $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları türevlenebilirlerse $(fg)' = f'g + fg'$ olduğundan Anateorem II ile

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = K \int_a^b f'g + K \int_a^b fg'.$$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ K -integrallenebilirse f fonksiyonu her $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ aralığında da K -integrallenebilir. Bu durumda

$$F(x) := K \int_a^x f$$

fonksiyonuna f 'nin $[a, b]$ 'deki **K-ilkeli** diyelim.

Teorem 4.4.7 (Anateorem I) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu K -integrallenebilirse

$$F(x) := K \int_a^x f$$

ilkeli $[a, b]$ 'de sürekli, $[a, b]$ 'de hhy türevlenebilir ve türevin olduğu x noktalarında $F'(x) = f(x)$. Ayrıca f 'nin sürekli olduğu noktalarda F türevlenebilir.

Teorem 4.4.8 (i) Her K -integrallenebilir $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Lebesgue ölçülebilir.

(ii) $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ için Lebesgue integrallenebilirlik ve K -integrallenebilirlik denk kavramlardır.

Bu teoremdeki (ii)'nin bir sonucu Monoton Yakınsaklık Teoremidir.

Teorem 4.4.9 (Monoton Yakınsaklık Teoremi) $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları K -integrallenebilen fonksiyonların bir artan dizisi ve $\lim_k K \int_a^b f_k < +\infty$ ise $f := \lim f_k$ fonksiyonu da K -integrallenebilir bir fonksiyondur ve $K \int_a^b f = K \int_a^b \lim f_k = \lim K \int_a^b f_k$.

Teorem 4.4.10 (Sınırlandırılmış Yakınsaklık Teoremi) Eğer $(f_k) \subset \mathcal{K}([a, b])$ ve

(i) $\inf f_k$ ve $\sup f_k$ fonksiyonları I 'da K -integrallenebilir ve

(ii) hemen her yerde $f(x) = \lim f_k(x)$ ise

f fonksiyonu I 'da K -integrallenebilir ve $K \int_a^b f = \lim K \int_a^b f_k$.

Teorem 4.4.11 (Henstock) Lebesgue integrallenebilen fonksiyonlar K -integrallenebilir.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. f Riemann integrallenebilirse $|f|$ de Riemann integrallenebilir. f 'nin Lebesgue integrallenebilir olması $|f|$ 'nin Lebesgue integrallenebilir olmasına denktir. K-integrallenebilirlik daha esnek bir kavramdır: f K-integrallenebilirse $|f|$ 'nin de K-integrallenebilir olması gerekmez!

Örnek 4.4.12. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $0 < x \leq 1$ için $f(x) := x^2 \cos(\pi/x^2)$ ve $f(0) := 0$ olarak açıklansın. f , $[0, 1]$ 'de türevlenebilir. Dolayısıyla f' fonksiyonu $[0, 1]$ 'de K-integrallenebilir. f' fonksiyonu $(0, 1]$ 'de sürekli olduğundan her $[\alpha, \beta] \subset (0, 1]$ kapalı aralıkta f' ve $|f'|$ fonksiyonları K-integrallenebilir ve $\left| K \int_{\alpha}^{\beta} f' \right| \leq K \int_{\alpha}^{\beta} |f'|$ geçerlidir. Şimdi her $k \in \mathbb{N}^*$ için $\alpha_k := \sqrt{2/(4k+1)}$ ve $\beta := 1/\sqrt{2k}$ olmak üzere $[\alpha_k, \beta_k] \subset (0, 1]$ ve $\{[\alpha_k, \beta_k]\}$ bir ayrık ailedir. Bu nedenle

$$K \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f'| \geq \left| K \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f' \right| = \frac{1}{2k}.$$

Bu durumda $|f'|$ fonksiyonu $[0, 1]$ 'de K-integrallenebilir olsaydı, her $n \in \mathbb{N}^*$ için

$$K \int_0^1 |f'| \geq \sum_{1 \leq k \leq n} K \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f'| \geq \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{2k}$$

olurdu ki bu bir çelişkidir!

K-integrali için “özdışı integral” kavramı yoktur. Altkısım 2.8.2'deki özdışı integral tanımları şimdi K-integrali tanımına dönüşürler. Örneğin kompakt olmayan $[a, b)$ ($a \in \mathbb{R}, b \leq +\infty$) ve $(a, b]$ ($-\infty \leq a, b \in \mathbb{R}$) aralıklarında altkısım 2.8.2'deki tanımlar kullanılır. Örneğin her $a < c < b$ için $K \int_a^c f$ integrali ve ayrıca $\lim_{c \uparrow b} K \int_a^c f$ var ve sonlu ise

$$K \int_a^b f := \lim_{c \uparrow b} K \int_a^c f$$

olarak açıklanır. Benzeri teoremler geçerlidir.

Son olarak kapalı $Q \subset \mathbb{R}^n$ kutusu ve herhangi bir $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $a, b \in \mathbb{R}^n$ ve $a < b$ olmak üzere $Q = Q[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ olsun. Burada Q 'nun girişimsiz sonlu kapalı kutulara parçalanışları ile çalışacağız. $\mathcal{Z} = \{Q_i\}$ böyle bir parçalanış ve $\xi_i \in Q_i$ olsun. $x \in \mathbb{R}^n$ herhangi bir nokta, $r > 0$ ve $I_r(x_i) := (x_i - r, x_i + r)$ ise

$$Q(x; r) := (x_1 - r, x_1 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r) = I_r(x_1) \times \cdots \times I_r(x_n)$$

olsun. Q 'da bir ölçerden yine $\delta : Q \rightarrow (0, +\infty)$ fonksiyonları anlaşılacaktır. Q 'daki ölçerlerin kümesini Q_{Δ} ile gösterelim. $\delta \in Q_{\Delta}$ ve daima $Q_i \subset Q(\xi_i; \delta(\xi_i))$ ise $\mathcal{Z}(\xi)$ parçalanışı δ -uygundur diyelim. Şimdi Riemann, Lebesgue ve K-integrallerini aynı çatı altında tanımlayalım.

Tanım $Q \subset \mathbb{R}^n$ bir kapalı kutu ve $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.

- (i) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir δ_ε ölçeri δ_ε -uygun her $\mathcal{Z}(\xi) \in \mathfrak{P}(Q)$ için

$$|\mathcal{R}(f, \mathcal{Z}(\xi)) - \alpha| < \varepsilon$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa f fonksiyonu Q 'da **K-integrallenebilir**, K-integrali α 'dır denir ve $K \int_Q f = \alpha$ yazılır. Burada her defasında δ_ε bir sabit ölçer olarak seçilebiliyorsa f fonksiyonu **Riemann integrallenebilir** denir ve $\int_Q f d\lambda_n := \alpha$ yazılır.

- (ii) f ve $|f|$ 'nin her ikisi de K-integrallenebilirse f fonksiyonu **Lebesgue integrallenebilir** denir ve $\int_Q f d\lambda_n = \alpha$ yazılır.

Daha önce söz ettiğimiz çoğu önerme olduğu gibi yeni duruma aktarılır. Q 'da K-integrallenebilen fonksiyonların ailesini $\mathcal{K}(Q)$ ile gösterirsek, yine $\mathcal{K}(Q)$ bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayıdır, hatta bir kafestir. $K \int_Q : \mathcal{K}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ doğrusal ve monotondur vs... . $A \subset Q$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin. $f_Q : Q \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f_Q|_A \equiv f$ ve her $x \in Q \setminus A$ için $f_Q(x) = 0$ olarak açıklansın. Q' bir başka kapalı kutu ve $A \subset Q'$ olsun. Riemann integralinde olduğu gibi f_Q 'nın K-integrallenebilir olması $f_{Q'}$ 'nin K-integrallenebilir olmasına denktir ve integrallenebilme durumunda $K \int_Q f_Q = K \int_{Q'} f_{Q'}$. Dolayısıyla aşağıdaki tanım kusursuzdur.

Tanım Q bir kapalı kutu, $A \subset Q$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin. f_Q fonksiyonu K-integrallenebilirse, f fonksiyonu A 'da **K-integrallenebilir** denir ve

$$K \int_A f := K \int_Q f_Q$$

olarak açıklanır.

$f \equiv 1$ fonksiyonu A 'da K-integrallenebilirse, $f \geq 0$ olduğundan Lebesgue integrallenebilir ve $K \int_A 1 = \int_A 1 d\lambda_n = \lambda_n(A)$ olur. Böylece sınırlı Lebesgue ölçülebilir kümeler ve ölçülerine ulaşmış oluyoruz.

Şimdi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Lebesgue integrallenebilirse, $A := \{x \in [a, b] | f(x) \geq 0\}$ ve $B := [a, b] \setminus A$ kümeleri Lebesgue ölçülebilir, f fonksiyonu A ve B kümelerinde Lebesgue integrallenebilir ve

$$\int_{A \sqcup B} f d\lambda_1 = \int_A f d\lambda_1 + \int_B f d\lambda_1$$

geçerlidir. Ancak K-integrali bu güzel özelliğe sahip değildir. Şimdi bir $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu K-integrallenebilir olsun, ancak Lebesgue integrallenebilir olmasın. A, B kümeleri yukarıdaki gibi tanımlansınlar. Böyle fonksiyonların varlığını biliyoruz (bkz Örnek 4.4.12). $I := [a, b]$ olmak üzere

$f^+ = (f|_A)_I$. Biz f 'nin A 'da K-integrallenemez olduğunu, dolayısıyla yukarıdaki eşitliğin K-integralleri için geçerli olmadığını savunuyoruz. $f|_A$ 'nın K-integrallenebilir olması tanım gereği f^+ 'nın I 'da K-integrallenebilir, dolayısıyla Lebesgue integrallenebilir olması demektir. O zaman $f^- = f^+ - f$ de, dolayısıyla $f = f^+ - f^-$ de Lebesgue integrallenebilir; bu ise varsayımımızla çelişir! Özetle Lebesgue integrali toplamsallıkta K-integralinden daha iyi davranır.

Sembol Listesi

Sembol	s.	Sembol	s.	Sembol	s.
$\mathbb{N}$	1	$\mathbb{R}$	1	j_n	19
$\mathbb{Z}$	1	$\mathcal{U}(a)$	2	j_n	19
$\mathbb{Q}$	1	$(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$	2	$K \langle a; \varepsilon \rangle$	23
$\mathbb{R}$	1	$\lim_{\alpha \in \Lambda}$	2	$\langle \mathcal{K}_k \rangle$	23
$\mathbb{C}$	1	$\lim_{\alpha} x_\alpha$	2	$A^{[k]}$	23
$\mathbb{N}^*$	1	$\lim x_\alpha$	2	$A_{[k]}$	23
$\mathbb{Z}^*$	1	$\mathfrak{P}_s(\mathbb{R}^n)$	11	$U_\varepsilon(A)$	24
$\mathbb{Q}^*$	1	$\langle a, b \rangle$	13	G_f	25
$\mathbb{R}^*$	1	$a < b$	13	$GL(n, \mathbb{R})$	30
$\mathbb{C}^*$	1	$a \leq b$	13	$M^{n \times n}(\mathbb{R})$	30
$:=, =:$	1	$\mathcal{Q}^n$	13	$[0, g]$	34
$\mathfrak{P}(X)$	1	$\mathcal{F}^n$	13	$[g, 0]$	34
$\sqcup$	1	$Q[a, b)$	13	$[0, g)$	34
$\bigsqcup$	1	$Q(a, b]$	13	$(0, g]$	34
$\langle a, b \rangle$	1	$Q(a, b)$	13	$[g, f]$	35
$\mathbb{R}$	1	$Q[a, b]$	13	f^+	35
$\check{A}$	1	$\mathcal{Q}_r^n$	13	f^-	35
$\overline{A}$	1	$\mathcal{F}_r^n$	13	$\mathbf{1}_A$	35
∂A	1	$\mathcal{Q}_l^n$	13	$\mathcal{Z}$	35
$(\Lambda, \prec)$	1	$\mathcal{F}_l^n$	13	$\mathfrak{Z}(\Omega)$	35
$:\Longleftrightarrow$	1	$\mathcal{Q}_a^n$	13	$\mathcal{Z} \prec \mathcal{Z}'$	36
$\Longleftrightarrow:$	1	$\mathcal{Q}_k^n$	13	$\mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2$	36
$\mathbb{R}_+$	1	$\mathcal{A} * \mathcal{B}$	14	$\lim_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(\Omega)}$	36
$\overset{*}{=}$	1	$v_n(Q)$	16	$\lim_{\mathcal{Z}}$	36
$\overset{*}{\Rightarrow}$	1	$\hat{v}_n$	18	$\ \mathcal{Z}\ $	36
$\overset{*}{\Longleftrightarrow}$	1	$\mathcal{J}^n$	19	$\mathcal{Z} \leq \mathcal{Z}'$	36
$\exists!$	1	$\check{j}_n$	19	$\lim_{\ \mathcal{Z}\ \rightarrow 0}$	36

Sembol	s.		Sembol	s.		Sembol	s.
$\mathcal{Z}(a)$	36		$\Gamma(x)$	98		$\mathcal{M}_l(A, V)$	148
$\mathfrak{Z}^*(\Omega)$	36		$\ s\ _*$	100		$\mathfrak{Z}_f^<$	150
$R(f, \mathcal{Z}(a))$	38		$\inf \emptyset$	107		$\mathcal{L}(A, V)$	151
$A(f, \mathcal{Z})$	38		$\sup \emptyset$	107		$\overline{M}_i$	155
$U(f, \mathcal{Z})$	38		$A_k \uparrow$	107		$\mathfrak{Z}_f(A)$	156
$\text{sl}(f, A)$	39		$A_k \downarrow$	107		$\mathfrak{Z}_f$	156
$\text{Sl}(f, A)$	39		$\mathcal{A}^\uparrow$	108		$\lim_f \mathcal{Z}$	158
$\text{Sl}(f, \mathcal{Z})$	39		$\sigma h(\mathcal{E})$	108		$\mathfrak{Z}_f(a)$	158
$\int_\Omega$	39		$\sigma(\mathcal{E})$	108		$\underline{L}(f, A)$	158
$\int_\Omega$	39		$\mathcal{B}(\mathcal{T})$	109		$\overline{L}(f, A)$	158
$\mathfrak{Z}_g(\Omega)$	40		$\mathcal{B}^n$	109		$L(f, A)$	158
$\int_\Omega$	40		$\lambda_n(A)$	116		$\int_A f d\lambda_n$	158
$\mathcal{R}(\Omega)$	45		$\overline{\lambda}_n(A)$	119		$\int_A f$	158
$\mathcal{R}(\Omega, \mathbb{R})$	45		$\mathcal{L}^n$	120		$\mathcal{L}(A)$	158
$\mathcal{M}_r(\mathcal{Z})$	46		$\lambda_n(A)$	120		C_x, C_y	170
$\mathcal{M}_r(\Omega)$	46		G_δ	127		$\int_a^b f d\lambda_1$	174
$\mathbb{H}_+^{n+1}$	46		F_σ	127		$\lim_{B \downarrow x}$	180
$\mathbb{H}_-^{n+1}$	46		$(-\infty, f)$	133		$\theta(A, x)$	180
f_Q	52		$\mathcal{L}(A)$	134		$O(f, A)$	182
$\mathbf{1}_\Omega$	52		$\underline{f}_k$	137		$V(f, D)$	188
S_f	54		$\overline{f}_k$	137		$p(f, D)$	188
$\Omega_{f,p}, \Omega_p$	54		$\mathcal{M}_{sl}$	139		$n(f, D)$	188
$Q_r[x]$	54		$\mathcal{B}^1$	140		$V_a^b f$	188
γ	59		$\{f > c\}$	140		p_f	188
$f(x, \cdot)$	60		$\{f \geq c\}$	140		n_f	188
$f(\cdot, y)$	60		$\{f < c\}$	140		v_f	188
f	64		$\{f \leq c\}$	140		D^+, D_+	191
Ω_t	64		$\{f > g\}$	141		D^-, D_-	191
τ_n	67		$\{f \geq g\}$	141		$N \int_a^b f$	197
$\int f$	80		$\{f = g\}$	141		$S(f, \varphi, \mathcal{Z}(\xi))$	199
$[F]_a^b$	80		$\{f \neq g\}$	141		$\int_a^b f d\varphi$	199
$\mathcal{J}_f(A)$	94		$\liminf_k f_k$	141		$\int f d\mu, L_\mu(X)$	203
$\int_a^{+\infty}$	95		$\limsup_k f_k$	141		$\mathcal{E}^\uparrow, \mathcal{E}_\downarrow$	205
$\int_{-\infty}^{+\infty}$	96		$\mathfrak{Z}_A^<$	148		$\Delta(I)$	208
$CPV \int_{-\infty}^{+\infty}$	96		$\mathfrak{Z}_A^{*<}$	148		$K \int_a^b f$	208

Kaynakça

- [1] **Amann, H.-Escher, J.:** *Analisis I*. Birkhäuser, 2006, 453s.
- [2] **Amann, H.-Escher, J.:** *Analisis II*. Birkhäuser, 2005, 424s.
- [3] **Bear, H.S.:** *A primer on Lebesgue integration*. Elsevier, 2001, 159s.
- [4] **Beals, R.:** *Analysis, An Introduction*. Cambridge Univ. Press, 2004, 273s.
- [5] **Browder, A.:** *Mathematical Analysis. An Introduction*. Springer, 1995, 349s.
- [6] **Bröcker, T.:** *Analysis I*. Spektrum, 1999, 247s.
- [7] **Bröcker, T.:** *Analysis II*. Spektrum, 1994, 178s.
- [8] **Bröcker, T.:** *Analysis III*. Spektrum, 1992, 218s.
- [9] **Burkill, J.T:** *The Lebesgue Integral*. Cambridge University Press, 1963, 93s.
- [10] **Carathéodory, C.:** Gesammelte mathematische Schriften, Bd.IV. München: C.H. Beck 1956.
- [11] **Dieudonné, J.:** *Eléments d'Analyse 1*. Gauthier-Villards, 1967, 422s.
- [12] **Elstrodt, J.:** *Mass und Integration Theorie*. Springer, 2005, 450 s. .
- [13] **Eroğlu, M.S.:** *Cantor Kümeler Kuramı*. eroglukitap.com veya Papatya Yayıncılık, 2007.
- [14] **Eroğlu, M.S.:** *Kompleks Analiz I*. eroglukitap.com, 2023, 447s.
- [15] **Fleming, W.:** *Functions of several variables*. Springer, 1977, 421s.
- [16] **Forster, O.:** *Analysis 3*, Springer, 2017, 321s.

- [17] **Garling D. J. H.:** *A Cours in Mathematical Analysis I*. Cambridge Un. Press, 2013, 318s.
- [18] **Garling D. J. H.:** *A Cours in Mathematical Analysis II*. Cambridge Un. Press, 2013, 336s.
- [19] **Garling D. J. H.:** *A Cours in Mathematical Analysis III*. Cambridge Un. Press, 2014, 334s.
- [20] **Goffman, C.:** *Calculus of several variables*. Harper, 1965, 190 s.
- [21] **Hausdorff, F.:** *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig: Veit&Comp. 1914 .
- [22] **Jones, F.:** *Lebesgue Integration on Euklidian Spaces*. Jones and Barlett, 2001, 611s.
- [23] **Jost, J.-Azad H.:** *Postmodern Analysis*. Springer, 2009, 367s.
- [24] **Kolmogorov, A.N.-Fomin, S.V.:** *Introductory Real Analysis*, Dover, 1975, 411.
- [25] **Königsberger, K.:** *Analysis 1*. Springer, 2001, 412s.
- [26] **Königsberger, K.:** *Analysis 2*. Springer, 2004, 474s.
- [27] **Körner, T. W.:** *A Companion to Analysis* (bir taslak), 623s.
- [28] **Kurtz, D.-Schwarz, C.:** *Theories of integration. The Integrals of Riemann, Lebesgue, ...* .McShane, 2004, 283 s.
- [29] **Munkres, J.R.:** *Analysis on manifolds*. Addison-Westley, 1991, 380s.
- [30] **Neumann, J. von:** *Zur allgemeinen Tehorie des Masses*. Fund. Math. 13, Vol I, No:26, 1929.
- [31] **Pugh, C. C.:** *Real mathematical analysis*. Springer, 2002, 437s.
- [32] **Riesz, F.-Nagy, B.Sz.:** *Funcional Analysis*. Blackie&Son, 1956, 478s.
- [33] **Rogosinski, W.W.:** *Volum and integral*. Olivier and Boyd, 1952, 164.
- [34] **Royden, H.L.:** *Real Analysis*. Mcmillan,1988, 457s.
- [35] **Rudin, W.:** *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 1967, 342s.
- [36] **Spivak, M.:** *Calculus on manifolds*. Addison-Westley, 1965, 158s.

- [37] **Walter, W.:** *Analysis 1*. Springer, 2003 7.baskı, 413s.
- [38] **Walter, W.:** *Analysis 2*. Springer, 1990, 408s.
- [39] **Weir, A.J.:** *Lebesgue integration and measure*. Cambridge unv. press, 1973, 290s.

Dizin

A

- ağ, 2
 - Cauchy ağı, 3
 - limiti, 3
 - Sandviç Teoremi, 5
 - yakınsak, 2
- altintegral, 40
 - Lebesgue —i, 158
- alttan sürekli hacim, 114
- alttoplam, 38, 156
- alttoplamsal, 18
- Anateorem
 - Kurzweil, 209, 211
 - Lebesgue, 194
- Aradeğer Teoremi (integraller için), 52

B

- basit fonksiyon, 147, 156
- belirsiz integral, 80
- Borel kümesi, 109
- Borel σ -cebiri, 109
- bozuk aralık, 13

C

- Cantor-Lebesgue fonksiyonu, 184
- Cauchy ağı, *ayrıca bkz.* ağ
- Cauchy esas değeri, 96
- Cauchy ölçütü, 4
- Cavalieri İlkesi, 65, 171
- cebir, 108
 - σ -cebiri, 108
- Chebyshev Önsavı, 191

Ç

- çap, 104
- Çarpım Teoremi, 128
- çevreleme, 208
- Çevreleme Önsavı, 208

D

- Daniell Özelliği, 204
- Darboux fonksiyonu, 198
- Darboux integrali, 41
- Darboux integrallenebilir, 41
- değişim, 188
- değişken değiştirme, 86, 87, 196
- dış ölçü, 119, 202
- Dini türevi, 191
- Dizi Ölçütü, 5, 151
- Dönüştürme Teoremi, 72
 - Genel —, 73
- Dönüşüm Formülü, 72, 74
- Dönüşüm Teoremi, 175
- düzgün sınırlı, 130
- Düzgünlük Teoremi, 127

E

- elementar fonksiyonlar, 205
- ε -duyarlı, 178
- ε -ölçülebilir, 147, 156

F

- Fatou Önsavı, 139, 167, 204
- figür, 13
 - ayrılmış, 20
- Fubini Teoremi, 63, 173

G

Γ (gamma) fonksiyonu, 98
 girişimsiz parçalanış, 40
 graf, 34
 grafaltı, 34
 tam —, 134

H

hacim
 alttan sürekli, 114
 dış Jordan hacmi, 19
 iç Jordan hacmi, 19
 Jordan hacmi, 10
 monotonluk, 18
 sıfır hacimli, 11, 25
 σ -sonlu, 110
 sonlu, 114
 sonlu hacimli, 110
 üstten sürekli, 114
 halka, 11, 15
 σ -halkası, 108
 hareketlere göre değişmezlik, 11
 hemen her yerde, 56, 202
 hhy, 202, *bkz.* hemen her yerde

I

I -integrallenebilir, 206
 iraksak integral, 93, 95
 gerçek —, 95

İ

ilkel
 K-ilkel, 211
 İlkel Teoremi, 81
 ilkeli, 79
 integral (kafeste), 204
 integral fonksiyonu, 79
 İntegral Ölçütü, 98
 integrallenebilir
 (Riemann-)Stieltjes —, 200
 *Riemann, 41
 Darboux, 41

I -integrallenebilir, 206
 K-integrallenebilir, 213
 Kurzweil, 209
 Lebesgue, 203, 213
 Riemann, 34, 41, 46, 213

J

Jordan Ayrışım Teoremi, 189
 Jordan hacmi, 10, 19
 dış, 19
 iç, 19
 Jordan ölçülebilir, 10, 19
 Jordan ölçülebilirlik ölçütü, 25

K

kafes özelliği, 199
 Kalkülüsün Anateoremi
 Kurzweil, 209, 211
 Lebesgue, 194
 karakteristik fonksiyon, *bkz.* özgün fonk-
 siyon
 karşıtürev, *bkz.* ilkel
 Karşıtürev Teoremi, 81
 kısmi integrasyon, 83
 Lebesgue, 194
 K-ilkel, 211
 K-integrallenebilir, 213, *bkz.* Kurzweil
 integrallenebilir
 koni, 66
 kök fonksiyon, *bkz.* ilkel
 kritik nokta, 94
 Kurzweil integrallenebilir, 209
 kutu, 13
 açık, 13
 kapalı, 13
 kutu yüzeyi, 16
 ölçülebilir, 170
 yarıaçık, 13
 kutupsal koordinatlar
 düzlemde, 75
 $\mathbb{R}^3$ 'te, 76

$\mathbb{R}^n$ 'de, 77

küme

girişimsiz, 1

yönlenmiş, 2

küp, 23

küpselyaklaşım, 23

küresel koordinatlar, 76

L Λ -dizisi, 2 λ -ölçülebilir, 134

Lebesgue integrali, 134, 151, 158

altintegral, 158

üstintegral, 158

Lebesgue integrallenebilir, 134, 158,
203, 213

Lebesgue merdiveni, 148

Lebesgue Monoton Yakınsaklık Teoremi,
135

Lebesgue Ölçü Problemi, 11

Lebesgue ölçülebilir, 120

Lebesgue ölçüsü, 116

Lebesgue Ölçütü, 57

Lebesgue Sınırlandırılmış Yakınsak-
lık Teoremi, 138, 168, 204,
211

Lebesgue toplamı, 148, 156

Lebesgue Yoğunluk Teoremi, 181

M

Majör Ölçütü, 98, 204

merdiven

Lebesgue —i, 148

 $\mathcal{R}$ -merdiveni, 100

sonlu Lebesgue —i, 139

— fonksiyonu, 46

Zeno merdiveni, 47

merdiven fonksiyonu, 46

Monoton Yakınsaklık Teoremi, 135,
203, 211

mutlak integrallenebilir, 93

mutlak sürekli, 185

N

Newton integrali, 197

normal gösterim, 100, 147

O

olasılık uzayı, 202

ortalama değer, 182

Ö

ölçer, 208

ölçü, 110

dış ölçü, 119

ölçü uzayı, 202

ölçülebilir dönüşüm, 139, 202

ölçülebilir uzay, 202

önölçü, 110

ötede, 2

özdışı integral, 95

özdışı integrallenebilir, 95

özgün fonksiyon, 52

P

parametre dönüşümü, 87

parçalanmış, 146, 155

 δ -ince, 209 δ -uygun, 209, 212 f -uygun, 157

girişimsiz, 40

ince, 146

R

Radon integrali, 205

Riemann fonksiyonu, 198

*Riemann integrali, 41

Riemann integrali, 34, 41, 100

altintegral, 40

üstintegral, 40

*Riemann integrallenebilir, 41

Riemann integrallenebilir, 34, 41, 46,
100, 213

Riemann toplamı, 37, 99
 alttoplam, 38
 üsttoplam, 38
 R-merdiveni, 100
 $\mathcal{R}$ -yaklaşılabilir, 124

S

salınım toplamı, 39
 sayılabilir toplamsal, 11
 Schwarz Eşitsizliği, 53
 sıfır dizisi, 37
 sıfır hacimli, 11, 25
 sıfır kümesi, 55, 124, 202
 sınırlı değişimli, 188
 σ -alttoplamsal, 114
 σ -cebiri, 108
 σ -halkası, 108
 σ -sonlu, 110
 σ -toplamsal, 110
 silindir, 28
 silindirik koordinatlar, 76
 simpleks, 66
 sondaş, 5
 sonlu Lebesgue merdiveni, 139
 sonlu toplamsal, 11
 Stieltjes integrali, 200
 Stieltjes integrallenebilir, 200
 Stieltjes toplamı, 200

T

tam grafaltı, 134
 toplamsallık
 alttoplamsal, 18
 integralde —, 51
 sayılabilir, 11
 σ -alttoplamsal, 114
 σ -toplamsallık, 110
 sonlu, 11
 toplanabilir aile, 6
 tüketme, 92
 türev, 184

U

uygun fonksiyon, 93, 157
 uygun parçalanış, 157, 209

Ü

üreten sistem, 109
 üstintegral, 40
 Lebesgue —i, 158
 üstten sürekli hacim, 114
 üsttoplam, 38, 156

V

Vitali Örtü Önsavı, 178
 Vitali örtüsü, 178

Y

yakınsak integral, 93, 95
 mutlak —, 97
 yarıhalka, 14
 Yerine Koyma Teoremi, 87
 yoğunlaşma noktası, 180
 yoğunluk, 180
 yönlenmiş alan, 78

Z

Zeno merdiveni, 47